

西南大学

2010年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：*所有专业*

研究方向：*所有方向*

试题名称：高等代数

试题编号：*819*

(答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效)

1. 填空题 (每小题 8 分, 共 40 分)

(1) 每一行和每一列只有一个元素为 1 其余元素全为零的 n 阶行列式 ($n \geq 2$) 共有 _____ 个,

所有这些行列式的和等于 _____。

(2) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{bmatrix}$, 若齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解, 则 $k =$ _____。

(3) 设 $f(x), g(x)$ 为复数域上两个最高次项系数为 1 的不同的 3 次多项式, 若

$x^4 + x^2 + 1 \mid f(x^3) + x^4 g(x^3)$, 则 $(f(x), g(x)) =$ _____。

(4) n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < k \leq n} |i-k| x_i x_k$ 的标准形 (平方项的系数为 1 或 -1)

是 _____。

(5) 在 Euclid 空间 R^n 中定义变换 A :

$$(\forall \alpha \in R^n) A\alpha = \alpha - k(\alpha, \varepsilon)\varepsilon,$$

其中 ε 为单位向量, k 为实数。若 A 为正交变换, 则 $k =$ _____。

2. (30分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $f(x) = 2x^{11} + 2x^8 - 8x^7 + 3x^5 + x^4 + 17x^2 - 4$, 求 $(f(A))^{-1}$.

3. (30分) 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间, T 是 V 的线性变换. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是 T 的互不相同的特征值, $V_{\lambda_i}, i=1, 2, \dots, k$ 是 T 的特征子空间, 且 $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$. W 是 V 的 T 不变子空间. 证明: W 的每个向量 η 可唯一表成 $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k$, 其中 $\xi_i \in V_{\lambda_i} \cap W, i=1, 2, \dots, k$.

4. (20分) 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间, T 是 V 的线性变换. 证明: 存在 V 的线性变换 S 使得 $TST = T$.

5. (20分) 设 A 为 n 阶实对称阵, B 为 n 阶实矩阵, 且 $BA + AB'$ 的特征值全大于零, 其中 B' 为 B 的转置. 证明: A 可逆.

6. (10分) 设 X, B_0 为 n 阶实矩阵, 按归纳法定义矩阵序列

$$B_i = B_{i-1}X - XB_{i-1}, i = 1, 2, 3, \dots.$$

证明: 如果 $B_n = X$, 那么 $X = 0$.