



一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 设函数  $f(x) = \frac{e^x - e^3}{(x-3)(x-e)}$ ，则

- (A)  $x=3$  及  $x=e$  都是  $f(x)$  的第一类间断点.
- (B)  $x=3$  及  $x=e$  都是  $f(x)$  的第二类间断点.
- (C)  $x=3$  是  $f(x)$  的第一类间断点,  $x=e$  是  $f(x)$  的第二类间断点.
- (D)  $x=3$  是  $f(x)$  的第二类间断点,  $x=e$  是  $f(x)$  的第一类间断点.

(2) 曲线  $y = \frac{x}{(x-4)^2}$  的凸弧区间是

- (A)  $(-\infty, -8)$ .
- (B)  $(-8, -4)$ .
- (C)  $(-4, 4)$ .
- (D)  $(4, +\infty)$ .

(3) 设函数  $f(x), g(x)$  具有二阶导数,  $g(x_0) = a, g'(x_0) = 0, g''(x) < 0$ , 则  $f(g(x))$  在  $x_0$  取极大值的一个充分条件是

- (A)  $f'(a) < 0$ .
- (B)  $f'(a) > 0$ .
- (C)  $f''(a) < 0$ .
- (D)  $f''(a) > 0$ .

(4) 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续,  $0 < f(x) < 1$ , 且  $\int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{2}$ . 记

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{f(x)(1-f(y))} dx dy, I_2 = \int_0^1 \int_0^1 f(x)(1-f(y)) dx dy, I_3 = \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y) dx dy,$$

则

- (A)  $I_1 < I_2 < I_3$ .
- (B)  $I_1 < I_3 < I_2$ .
- (C)  $I_2 < I_1 < I_3$ .
- (D)  $I_3 < I_2 < I_1$ .

(5) 设向量组 I:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  可由向量组 II:  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表示. 下列命题正确的是

- (A) 若向量组 I 线性无关, 则  $r \leq s$ .
- (B) 若向量组 I 线性相关, 则  $r > s$ .
- (C) 若向量组 II 线性无关, 则  $r \leq s$ .
- (D) 若向量组 II 线性相关, 则  $r > s$ .

(6) 设  $A$  为 4 阶实对称矩阵, 且  $A^2 + A = O$ . 若  $A$  的秩为 3, 则  $A$  相似于

(A)  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ .

(B)  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ .

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ .

(D)  $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ .

- (7) 设随机变量  $X$  服从  $(-1, 1)$  上的均匀分布, 事件  $A = \{0 < X < 1\}$ ,  $B = \{|X| < \frac{1}{4}\}$ , 则  
 (A)  $P(AB) = 0$ . (B)  $P(AB) = P(A)$ .  
 (C)  $P(A) + P(B) = 1$ . (D)  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ .
- (8) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ ) 的简单随机样本. 记统计量  
 $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ , 则  $ET =$   
 (A)  $\sigma^2$ . (B)  $\mu^2$ . (C)  $\sigma^2 + \mu^2$ . (D)  $\sigma^2 - \mu^2$ .

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

- (9)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-a}\right)^x =$  \_\_\_\_\_.
- (10) 曲线  $y = \frac{2x^2 + \sin x}{\cos x - x^2}$  的水平渐近线的方程为  $y =$  \_\_\_\_\_.
- (11) 已知一个长方形的长  $x$  以  $0.2 \text{ m/s}$  的速率增加, 宽  $y$  以  $0.3 \text{ m/s}$  的速率增加, 当  $x = 12 \text{ m}$ ,  $y = 5 \text{ m}$  时, 其面积增加的速率为 \_\_\_\_\_.
- (12) 函数  $z = \frac{y^x - 1}{y}$  在点  $(1, e)$  处的全微分  $dz|_{(1,e)} =$  \_\_\_\_\_.
- (13) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $A^T$  为  $A$  的转置矩阵, 则行列式  $|A^T A| =$  \_\_\_\_\_.
- (14) 设随机变量  $X$  的概率分布为  $P\{X = k\} = \theta(1-\theta)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$ , 其中  $0 < \theta < 1$ . 若  $P\{X \leq 2\} = \frac{5}{9}$ , 则  $P\{X = 3\} =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、

证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = \ln \tan \frac{x}{2} + e^{-x} \cos 2x$ , 求  $f''(\frac{\pi}{2})$ .

(16) (本题满分 10 分)

计算定积分  $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx$ .

(17) (本题满分 11 分)

设某农作物长高到 0.1m 后, 高度的增长速率与现有高度  $y$  及  $(1-y)$  之积成比例(比例系数  $k > 0$ ). 求此农作物生长高度的变化规律(高度以 m 为单位).

(18) (本题满分 11 分)

计算二重积分  $I = \iint_D [x + \sin(xy)] dx dy$ , 其中区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 1\}$ .

(19) (本题满分 10 分)

证明:  $(1 + \frac{1}{x})^{x+1} > e$  ( $x > 0$ ).

(20) (本题满分 10 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

已知线性方程组  $Ax = \beta$  有 2 个不同的解, 求  $a$  的值和方程组  $Ax = \beta$  的通解.

(21) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & a \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, 6 \text{ 是 } A \text{ 的一个特征值.}$$

(I) 求  $a$  的值;

(II) 求  $A$  的全部特征值和特征向量.

(22) (本题满分 10 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布为

	Y	-1	0	1
X				
0		$\frac{1}{3}$	0	$a$
1		$\frac{1}{4}$	$b$	$\frac{1}{12}$

且  $P\{X+Y=1 \mid X=0\} = \frac{1}{3}$ . 求

(I) 常数  $a, b$ ;

(II)  $\text{Cov}(X, Y)$ .

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

令  $Y = X^2 + 1$ , 求

(I)  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ ;

(II)  $P\left\{-1 < Y < \frac{3}{2}\right\}$ .

农学门类联考

数 学

(科目代码: 314)

考生注意事项

1. 答题前, 考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内, 写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束, 将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。