

# 西南大学

## 2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：物理学

研究方向：各方向

试题名称：高等数学

试题编号：613

(答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效)

### 一、填空题 (本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分)

1. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$  的和函数为\_\_\_\_\_.

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x)^{\frac{1}{x}} =$ \_\_\_\_\_.

3. 设  $C$  是  $x^2 + y^2 = 1$  的正向一周，则  $\oint_C e^{x^2} dx + e^{y^2} dy$  等于\_\_\_\_\_.

4. 设  $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ ，则其以 2 为周期的傅里叶级数在  $x=1$  处收敛于\_\_\_\_\_.

5. 设  $z = x^y$ , ( $x > 0$ ), 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ \_\_\_\_\_.

6. 微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}$  的通解为\_\_\_\_\_.

7. 设  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵，且  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，则  $A^{-1} =$ \_\_\_\_\_.

8. 矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  的秩为\_\_\_\_\_.

9. 已知三阶矩阵  $A$  的特征值为 1, 2, 3, 则行列式  $|3A - E|$  的值为\_\_\_\_\_.
10. 设  $A$  为  $n$  阶不可逆矩阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 且  $A^*$  的秩  $r_{A^*} \neq 0$ , 则齐次线性方程组  $AX = O$  的基础解系中含有\_\_\_\_\_个线性无关的解向量.

## 二、选择题 (本题共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分)

1. 函数  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处
- A. 连续但不可导    B. 可导    C. 不连续    D. 无定义    [ ]
2. 函数在原点具有连续的二阶导数, 且  $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -2$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} =$
- A. 不存在    B. -2    C. -1    D. 0    [ ]
3. 设积分区域  $D$  是由曲线  $y = x, y = 0, x = 1$  围成的区域, 则  $\iint_D dx dy =$
- A. 1    B. 2    C.  $\frac{1}{2}$     D.  $\frac{1}{4}$     [ ]
4. 设有直线  $L: \begin{cases} x + 3y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y - 10z + 3 = 0 \end{cases}$  及平面  $\pi: 4x - 2y + z - 2 = 0$ , 则直线  $L$
- A. 平行于  $\pi$     B. 垂直于  $\pi$     C. 在  $\pi$  上    D. 与  $\pi$  斜交    [ ]
5. 设  $\int f(x) dx = \ln x + c$ , 则  $\int_0^2 x^2 f(1+x^3) dx =$
- A.  $2 \ln 3$     B.  $\frac{2}{3} \ln 3$     C.  $6 \ln 3$     D.  $\frac{8}{3} \ln 3$     [ ]
6. 已知  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 且  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ , 求  $|(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})| =$
- A. 7    B. 12    C. 24    D. 0    [ ]
7.  $n$  元齐次线性方程组  $AX = 0$  有非零解的充要条件是
- A.  $|A| = 0$     B. 方程的个数  $> n$
- C.  $\text{秩}(A) - n = 0$     D.  $\text{秩}(A) - n < 0$     [ ]
8. 设二次型  $f(x_1, x_2) = X'AX$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ , 则这个二次型应是
- A.  $2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$     B.  $2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + x_2^2$
- C.  $x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2$     D.  $2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$     [ ]

9. 行列式  $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ g & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  的值为

- A.  $-bdfg$       B.  $bdfg$       C.  $aceg$       D. 0      [ ]

10. 下列命题错误的是

- A. 属于不同特征值的特征向量必线性无关  
 B. 相似矩阵必有相同的特征值  
 C. 特征值相同的矩阵未必相似  
 D. 属于同一特征值的特征向量必线性相关      [ ]

### 三、(本题共 4 小题, 每小题 8 分, 满分 32 分)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$ .

2. 设  $z = u^2 \ln v$ ,  $u = \frac{x}{y}$ ,  $v = 3x - 2y$ , 求  $dz$ .

3. 求积分  $I = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ .

4. 求方程  $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin x$  的通解.

### 四、(本题满分 10 分)

求积分  $I = \int_L (2x + \sin y) dx + (2y + x \cos y) dy$ , 其中  $L$  是在抛物线  $y = \pi x^2$  上由点

$A(0,0)$  到  $B(1, \pi)$  的一段弧.

### 五、(本题满分 10 分)

将函数  $f(x) = x^2$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) 展为傅里叶级数, 并求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的和.

### 六、(本题共 2 小题, 每小题 10 分, 满分 20 分)

1. 已知三阶矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ , 对应的特征向量分别为  $X_1 = (1, 0, 1)'$ ,

$X_2 = (1, 4, 0)'$ ,  $X_3 = (0, -1, 1)'$ , 那么  $A$  能否与对角矩阵相似? 若能, 则求出  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角矩阵, 并计算出  $A$  来.

2. 设  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  是三维向量空间的一组基,  $T$  是这个空间的线性变换, 它使

$$T(\bar{a}_1) = \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 + 2\bar{a}_3$$

$$T(\bar{a}_2) = 2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + 2\bar{a}_3$$

$$T(\bar{a}_3) = 2\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 + \bar{a}_3$$

(1) 写出线性变换  $T$  在基  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  下的矩阵  $A$ ;

(2) 求出  $A$  的特征值和线性无关的特征向量.

### 七、(本题满分 10 分)

设  $x > 0$ , 证明不等式  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ .

### 八、(本题共 8 小题, 每小题 1 分, 满分 8 分)

研究函数  $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$  填空 (不要过程)

1. 定义域 \_\_\_\_\_.
2. 一阶导数  $y' =$  \_\_\_\_\_.
3. 二阶导数  $y'' =$  \_\_\_\_\_.
4. 单增区间 \_\_\_\_\_; 单减区间 \_\_\_\_\_.
5. 极值点 \_\_\_\_\_; 极值 \_\_\_\_\_.
6. 凸区间 \_\_\_\_\_; 凹区间 \_\_\_\_\_.
7. 拐点 \_\_\_\_\_.
8. 水平渐近线 \_\_\_\_\_; 垂直渐近线 \_\_\_\_\_.