

西南大学

2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业:

研究方向:

试题名称: 高等代数

试题编号: 819

(答题一律做在答题纸上, 并注明题目番号, 否则答题无效)

1. 填空题 (每小题 6 分, 共 60 分)

(1) 设 $n \geq 3$, 在由 $1, 2, \dots, n$ 构成的 $n!$ 个 n 级排列中, 反序数等于 2 的排列共有_____个。

(2) 设 A, B 为 n 阶方阵。若 $|A| = 2$, $|B| = 3$, $|A^{-1} + B| = 6$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____。

(3) 设 $f(x) = x^4 + x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + x - 2$ 。若 $(f(x), g(x)) = g(x)$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____。

(4) 设 A 为三阶方阵, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为三阶可逆阵, 并且 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 。

若 $Q = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ _____。

(5) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix}$ 是三阶正定矩阵, 则 k 的取值范围是_____。

(6) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为复数域上三阶方阵, 则 A 的最小多项式为_____。

(7) 二元实二次型 $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 的秩 = _____。

(8) 设 n 元非齐次线性方程组 $AX=B$ 无解, 其系数矩阵的秩为 4, 则其增广矩阵的秩为_____。

(9) 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 向量 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 则非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的通解为_____。

(10) 设 D 为一个三阶行列式; D 的元素为 1 或 -1, 则 D 的最大值为_____。

2. (20 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 且 $AB+E=A^2+B$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 求 B 。

3. (20 分) 设 A 为三阶实对称矩阵, 其特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=0$, $\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 与

$\eta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 分别是 A 的属于特征值 λ_1 与 λ_2 的特征向量。求矩阵 A 。

4. (20 分) 设 P 为数域, $f(x), g(x) \in P[x]$, $a, b, c, d \in P$, 且 $ad-bc \neq 0$ 。证明

$$(af(x)+bg(x), cf(x)+dg(x)) = (f(x), g(x))。$$

5. (20 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2011 & 1 \\ 0 & 0 & 2011 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 证明 $X^2=A$ 无解, 这里 X 为三阶未知复矩阵。

6. (10 分) 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间, τ 是 V 的一个线性变换, τ 的特征多项式为 $f(\lambda)$ 。

证明: $f(\lambda)$ 在 P 上不可约的充分必要条件是 V 无关于 τ 的非平凡不变子空间 (通常称 V 的子空间 0 和 V 为 V 的关于 τ 的平凡不变子空间)。