西南大学

2011年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：物理学　　　　研究方向：各方向

试题名称：高等数学　　　　试题编号：603

（答题一律做在答题纸上，并注明题目番号，否则答题无效）

一、填空题（本题共10小题，每小题3分，满分30分）

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x+1)^n$ 的收敛域为________.

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$________.

3. 设 C 是 $x^2+y^2=1$ 的正向一周，则 $\oint_c xy^2dx+x^2ydy$ 等于________.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$，则其以2为周期的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于________.

5. 设函数 $f(x)$ 有连续导数，$f(0)=0$，且 $f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\ne 0\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$________.

6. 微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 的通解为________.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&3&3\end{pmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$________.

8．已知三阶矩阵 A 的特征值为 1，－1，2，则行列式 $|A|$ 的值为________.

9．设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且 $\bar{\eta}_1=(2,\ 3,\ 4,\ 5)$，$\bar{\eta}_2+\bar{\eta}_3=(1,\ 2,\ 3,\ 4)$，则该方程组的通解为________.

10．A、B 均为 n 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，且 $|A|=2$，$|B|=-3$，则 $|2A^*B^{-1}|=$________.

二、单项选择题（本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分）

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

A. 极限不存在　　B. 极限存在但不连续

C. 连续但不可导　　D. 可导　　[ ]

2.设函数 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则

A. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

B. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点

C. $(a, f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点　　[ ]

3. 设积分区域 D 是由曲线 $y=0, x=1, y=x$ 围成的区域，则 $\iint_D dxdy=$

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2　　[ ]

4. 设有直线 L：$\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 π：$4x-2y+z-2=0$，则直线 L

A. 平行于 π　　B. 垂直于 π　　C. 在 π 上　　D. 与 π 斜交　　[ ]

5. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-2\dfrac{y}{x}=0$ 的通解为

A. x^2+c　　B. $\dfrac{1}{2}cx^2$　　C. cx^2　　D. x^2　　[ ]

6. 已知$\vec{a}\perp\vec{b}$，且$|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=3$，求$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$

A. 25　　B. 24　　C. 12　　D. 7　　[ ]

7. 非齐次线性方程组$AX=b$中未知量的个数为n，方程个数为m，系数矩阵A的秩为r，则下列成立的是

A. $m=n$时，方程组$AX=b$有唯一解

B. $r=n$时，方程组$AX=b$有唯一解

C. $r=n$时，方程组$AX=b$有无穷多解

D. $r=m$时，方程组$AX=b$有解　　[ ]

8. 下列命题错误的是

A. 属于不同特征值的特征向量必线性无关

B. 属于同一特征值的特征向量必线性相关

C. 相似矩阵必有相同的特征值

D. 特征值相同的矩阵未必相似　　[ ]

9. 设A、B、C均为n阶方阵，E为n阶单位矩阵. 若$ABC=E$，则下列各式中总成立的有

A. $BCA=E$　　B. $ACB=E$

C. $BAC=E$　　D. $CBA=E$　　[ ]

10. 若向量组α,β,γ线性无关，向量组α,β,δ线性相关，则

A. α必可由β,γ,δ线性表示　　B. β必不可由α,γ,δ线性表示

C. δ必可由α,β,γ线性表示　　D. δ必不可由α,β,γ线性表示　　[ ]

三、(本题共 4 小题，每小题 8 分，满分 32 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$.

2. 设$z=u^2-v^2, u=\sin x^2 y, v=\cos xy^2$，求$dz$.

3. 求积分 $I=\int\dfrac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

4. 求方程 $y''-y=3e^{2x}+4x\sin x$ 的通解.

四、（本题满分 10 分）

计算曲线积分 $\int_C (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$，其中 C 是从点（a ，0）到点（0 ，0）的上半圆周 $y = \sqrt{ax - x^2}$ ，m 为常数.

五、（本题满分 10 分）

将函数 $f(x) = x + 1\ (0 \le x \le 1)$ 分别展为傅里叶正弦级数和余弦级数.

六、（本题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分）

1．已知 $A^2X + E = A + X$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$E$ 为 3 阶单位矩阵，求矩阵 X .

2. 设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 是三维向量空间的一组基，A 是这个空间的线性变换，它使

$$A(\vec{a}_1) = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$$
$$A(\vec{a}_2) = 2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 6\vec{a}_3$$
$$A(\vec{a}_3) = -\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3$$

（1） 写出 A 在基 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 下的矩阵 A；

（2） 求出 A 的特征值和线性无关的特征向量；

（3） A 能否对角化？若能，写出它的相似对角矩阵 B 和矩阵 C，使 $B = C^{-1}AC$.

七、（本题满分 8 分）

设 $x > 0$，证明不等式 $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$

八、（本题满分 10 分）

在原点处放置一单位正电荷 e，产生一静电场，电势为 $V = \dfrac{e}{r}$，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 为场中一点到电荷的距离，求电场的强度.