

西南大学

2011年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业: 环境科学

研究方向: 所有方向

试题名称: 数学(理)

试题编号: 602

(答题一律做在答题纸上, 并注明题目番号, 否则答题无效)

一、填空题 (每小题 4 分, 共 40 分)

1. 已知 $\frac{(x+ay)dx+yd y}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分, 则 $a =$ _____.

2. 设函数 $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} =$ _____, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$ _____.

3. 函数 $y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$ 的反函数 $y =$ _____.

4. 若函数 $z = 2x^2 + 2y^2 + 3xy + ax + by + c$ 在点 $(-2, 3)$ 处取得极值, 则 $a =$ _____, 点 $(-2, 3)$ 是此函数的极 _____ (大、小) 值点.

5. 设 $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ($0 \leq x \leq \pi$) 则 $b_2 =$ _____.

6. 设函数 $\int f(x, y) = x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$, 则 $f'_x(x, 1) =$ _____.

7. 设 $\int f(x) dx = \sin x + c$, 则 $\int f^{(n)}(x) dx =$ _____.

8. 已知 $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$, 则 $f^{(100)}(0) =$ _____.

9. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $\int_0^y e^{t^2} dt + ye^x = 2$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} =$ _____.

10. 直线 $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角为 _____。

二、判断题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. 若 $y = f(x)$ 在 $(-a, a)$ 可导且为奇 (偶) 函数, 则在该区间内, $f'(x)$ 为偶 (奇) 函数。 ()
2. $y = \sqrt{1-x}$ 与 $x = 1+e^t$ 可以复合成复合函数。 ()
3. 函数的幂级数展开式一定是此函数的泰勒级数。 ()
4. 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$ 。 ()
5. 若 $[c, d]$ 包含于 $[a, b]$, 则必有 $\int_c^d f(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$ 。 ()
6. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 均不存在, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 必不存在。 ()
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$ ()
8. 因为 $x \rightarrow 0$ 时, $\operatorname{tg} x \sim x, \sin x \sim x$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$ 。 ()

三、计算题 (每小题 9 分, 共 36 分, 写出计算步骤, 只给答案不得分)

1. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

3. $\int \frac{3}{x^3 + 1} dx$

4. $\int_1^e \sin(\ln x) dx$

四、(13分) 有一圆锥形容器，高为 10 cm，底半径为 4 cm，现以 $5 \text{ cm}^3/\text{s}$ 的速度把水注入该容器，求当水深 5 cm 时水面上升的速度：(a) 圆锥顶点在上；(b) 圆锥顶点在下。（提示：圆锥体积 $V = \frac{1}{3}r^2h$ ）

五、(12分) 求出函数 $f(x) = x^2 - \ln x^2$ 的单调区间。

六、(12分) 一直线通过点 $A(1,2,1)$ ，且垂直于直线 $L: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ ，又和直线 $x = y = z$ 相交，求该直线方程；

七、(13分) 求 $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$ 的通解；