

(7) 设随机事件  $A, B$  满足  $0 < P(A) < 1$ , 则必有 ( )  
 (A)  $P(A) \geq P(A|B)$  (B)  $P(A) \leq P(A|B)$   
 (C)  $P(B) \geq P(B|A)$  (D)  $P(B) \leq P(B|A)$

(8) 设总体  $X$  服从参数为  $\lambda (\lambda > 0)$  的泊松分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自该总体的简单随机样本, 则对于统计量  $T_1 = \sum_{i=1}^n X_i$  和  $T_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 有 ( )  
 (A)  $ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$  (B)  $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$   
 (C)  $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$  (D)  $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$

绝密★启用前

## 2011 年全国硕士研究生入学统一考试

### 农学门类联考

### 数学

(科目代码: 314)

#### 考生注意事项

1. 答题前, 考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内, 写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束, 将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

三、解答题: 15~23 小题, 共 90 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、

证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 求  $a$  的值。

(A)  $\frac{\sqrt{2}-1}{2} + k_1(\sqrt{2}-1)$  (B)  $\frac{\sqrt{2}-1}{2} + k_2(\sqrt{2}-1)$

(C)  $f(x)$  (D)  $f'(x)$

(A)  $\frac{\sqrt{2}+1}{2} + k_1(\sqrt{2}+1)$  (B)  $\frac{\sqrt{2}+1}{2} + k_2(\sqrt{2}+1)$   
 (C)  $\frac{\sqrt{2}+1}{2} + k_1(\sqrt{2}+1)$  (D)  $\frac{\sqrt{2}+1}{2} + k_2(\sqrt{2}+1)$



一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 当  $x \rightarrow 0$  时，下列函数为无穷大量的是 **B**

(A)  $\frac{\sin 3x}{x}$ . (B)  $\cot x$ . (C)  $\frac{1 - \cos x}{x}$ . (D)  $e^{\frac{1}{x}}$ .

(2) 设函数  $f(x)$  可导， $f(0)=0$ ， $f'(0)=1$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^3 x)}{\lambda x^k} = \frac{1}{2}$ ，则

(A)  $k=2$ ,  $\lambda=2$ . (B)  $k=3$ ,  $\lambda=3$ .  
(C)  $k=3$ ,  $\lambda=2$ . (D)  $k=4$ ,  $\lambda=1$ .

(3) 设  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin x} dx$ ，则 **D**

(A)  $I_1 < \frac{\pi}{4} < I_2$ . (B)  $I_1 < I_2 < \frac{\pi}{4}$ .  
(C)  $\frac{\pi}{4} < I_1 < I_2$ . (D)  $I_2 < \frac{\pi}{4} < I_1$ .

(4) 设函数  $z = \arctan e^{-xy}$ ，则  $dz =$  **A**

(A)  $-\frac{e^{xy}}{1+e^{2xy}}(ydx + xdy)$ . (B)  $\frac{e^{xy}}{1+e^{2xy}}(ydx - xdy)$ .

(C)  $\frac{e^{xy}}{1+e^{2xy}}(xdy - ydx)$ . (D)  $\frac{e^{xy}}{1+e^{2xy}}(ydx + xdy)$ .

(5) 将 2 阶矩阵  $A$  的第 2 列加到第 1 列得矩阵  $B$ ，再交换  $B$  的第 1 行与第 2 行得单位矩阵，则  $A =$  **D**

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

(C)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . (D)  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(6) 设  $A$  为  $4 \times 3$  矩阵， $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  是非齐次线性方程组  $Ax = \beta$  的 3 个线性无关的解， $k_1, k_2$  为任意常数，则  $Ax = \beta$  的通解为

(A)  $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$ . (B)  $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$ .

(C)  $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$ . (D)  $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$ .



(7) 设随机事件  $A, B$  满足  $A \subset B$  且  $0 < P(A) < 1$ , 则必有 C (4分)

(A)  $P(A) \geq P(A|A \cup B)$ . (B)  $P(A) \leq P(A|A \cup B)$ .

(C)  $P(B) \geq P(B|A)$ . (D)  $P(B) \leq P(B|\bar{A})$ .

(8) 设总体  $X$  服从参数为  $\lambda (\lambda > 0)$  的泊松分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  为来自该总

体的简单随机样本. 则对于统计量  $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  和  $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$ , 有 A

(A)  $ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$ . (B)  $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$ .

(C)  $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$ . (D)  $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$ .

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$ , 则  $f'(x) = \frac{3}{x} e^{\frac{3}{x}}$ .

(10) 曲线  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$  在其拐点处的切线方程是  $y = 0$ .

(11) 反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} = \frac{\pi}{4}$ .

(12) 设函数  $z = (2x+y)^{3y}$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{(1,1)} = \frac{1}{6} e^2$ .

(13) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , 且 3 阶矩阵  $B$  满足

$ABC = D$ , 则  $|B^{-1}| = \frac{1}{6}$ .

(14) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$ , 则  $E(XY^2) = \frac{3}{2}\mu\sigma^2$ .

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 求

(I)  $a$  的值;

(II)  $f'(x)$ .



(16) (本题满分 10 分)

求不定积分  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx$ .

(17) (本题满分 11 分)

设函数  $y = y(x)$  是微分方程  $xdy + (x - 2y)dx = 0$  满足条件  $y(1) = 2$  的解, 求曲线  $y = y(x)$  与  $x$  轴所围图形的面积  $S$ .

(18) (本题满分 10 分)

证明: 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\frac{\pi}{2} < x \sin x + 2 \cos x < 2$ .

(19) (本题满分 11 分)

计算二重积分  $\iint_D y dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$ .

(20) (本题满分 10 分)

已知  $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 2)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, -1, 4)^T$ ,  $\beta = (1, 0, a)^T$ . 问  $a$  为何值时,

(I)  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示;

(II)  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 并写出一般表达式.

(21) (本题满分 11 分)

已知 1 是矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  的二重特征值.

(I) 求  $a$  的值;

(II) 求可逆矩阵  $P$  和对角矩阵  $Q$ , 使  $P^{-1}AP = Q$ .



(22) (本题满分 10 分)

设随机变量  $X$  与  $Y$  的概率分布分别为

$X$	0	1
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$Y$	-1	0	1
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且  $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ .

(I) 求二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布;

(II) 求  $EX, EY$  及  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ .

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $G$  上的均匀分布, 其中  $G$  是由  $x - y = 0, x + y = 2$  与  $y = 0$  所围成的三角形区域.

(I) 求  $X$  的概率密度  $f_X(x)$ ;

(II) 求  $P\{X - Y \leq 1\}$ .

### 考生注意事项

1. 答题前, 考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内, 写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束, 将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。