重庆大学2003硕士研究生入学考试试题

科目代码：330 （共二页） 1.

考试科目： 数学分析

专 业：

请考生注意：

答题一律（包括填空题和选择题）答在答题纸或答题册上，答在试题上按零分计。

一、是非题，对的打√，错的打×。（2×12=24分）

1. $\forall p$为正整数，$\lim\limits_{n\to\infty}|u_{n+p}-u_n|=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$存在。 （ ）

2. 设$f(x)$在(a,b)一致连续，则$f(x)$在(a,b)上有界 。 （ ）

3. 若$f(x)$在x_0的邻域内有定义，在x_0可导，则$f(x)$在x_0的某邻域内连续。 （ ）

4. $f(x),g(x)$在$[a,b]$上可导，$\forall x\in[a,b], f'(x)\le g'(x)$，

则$\forall x\in[a,b], f(x)\le g(x)$ 。 （ ）

5. 定义函数$f(x)$在$[a,b]$可积时，必须先假定$f(x)$在$[a,b]$上有界 。 （ ）

6. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上的连续点无限多个。 （ ）

7. 连续函数的不定积分一定存在 。 （ ）

8. 若$f(x,y)$在区域D内对x和y都是连续的，则$f(x,y)$对$(x,y)\in D$为二元连续。 （ ）

9. $u_n>0. n=1,2,\ldots$ 且$\forall n$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。 （ ）

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_{n+1}-u_n|$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$存在。 （ ）

11. $f(x)$在$[0,+\infty)$上非负连续，n 是正整数，若$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n f(x)dx$存在，

则$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛。 （ ）

12. 若$f(x,y)$的偏导数f_x,f_y在(x_0,y_0)存在，则$f(x,y)$在(x_0,y_0)连续。 （ ）

二、计算题（6×10=60 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$。

2. 设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有定义，$g(0)=g'(0)=0$

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$ 求 $f'(0)$。

3. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$。

4. 求由圆柱面 $x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2\quad(a>0)$ 所围立体的体积。

5. 设 $x(y), z(y)$ 是由方程组 $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ z=g(x,y) \end{cases}$ 所确定的隐函数，求 $x'(y), z'(y)$。

6. 计算第二型曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} x(x^2+1)dydz+y(y^2+2)dzdx+z(z^2+3)dxdy$$

其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外则。

三、证明题（66 分）

1. 1）证明不等式 $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}<\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}<\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}\quad n=1,2,\ldots$

2）设 $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}-\sqrt{2n-1}$

（15 分）

证明 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-k\sqrt{x})=0$，$k>0$ 为常数。证明：$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。（15 分）

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，证明其变上限积分 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在每一 $x\in(a,b)$ 其单侧导数 $F'_+(x), F'_-(x)$ 均存在。（16 分）

4. 设 $c_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续（$n=1,2,\cdots$），$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，令 $M_n=\max\limits_{[0,1]}c_n(x)$，问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 否收敛？用 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n(1-x)}{\ln n}$ 验证上面的结论。（20 分）