(73)

重庆大学 2004 年硕士研究生入学考试试题

科目代码：330　　　　　　　　　　　　共 2 页

科目名称：数学分析

请考生注意：

答题一律（包括填空题和选择题）答在答题纸或答题册上，答在试题上按零分计。

第一部分 计算题（共 60 分）

一、（10 分）设 $0<a<1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n\right)$。

二、（10 分）用变换 $\xi=x,\eta=x^2+y^2$ 化简方程 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，并求出这个方程的通解 $z=z(x,y)$。

三、（10 分）求函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)$（$n$ 是正整数）在条件 $x+y=a$（$x\geq0,y\geq0$，常数 $a>0$）下的极值。

四、（10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+(-1)^n)^n}{n}x^n$ 的收敛半径，并判断它在收敛区间端点的收敛情况。

五、（10 分）计算二重积分

$\iint\limits_D\dfrac{3x}{y^2+xy^3}dxdy$，$D$：平面曲线 $xy=1,xy=3,y^2=x,y^2=3x$ 所围成的有界闭区域。

六、（10 分）计算第二型曲面积分

$$\iint\limits_S\frac{axdydz+(x-2yz)dzdx+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中 S 是下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的下侧，$a>0$ 是常数。

第二部分 证明题（共 90 分）

七、（10 分）按极限定义（$\varepsilon-\delta$ 法）证明

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{25x^2-9}}=\frac{1}{4}$$

八、（15 分）

（1）叙述函数 $f(x)$ 在区间 I 一致连续的定义；

（2）用肯定语言叙述函数 $f(x)$ 在区间 I 不一致连续的定义；

（3）设 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，$a>0$ 为任一常数，证明：函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上一致连续，但在区间 $(0,+\infty)$ 上不一致连续。

九、（10 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)\cdot f'(b)>0$，证明：函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内至少有一个零点。

十、（15 分）

（1）设 $y=\varphi(x)\ (x\geq 0)$ 是严格增加的连续函数，$\varphi(0)=0$，$x=\psi(y)$ 是它的反函数，证明：

$$\int_0^a \varphi(x)dx+\int_0^b \psi(y)dy\geq ab,\quad (a,b\geq 0)$$

并给出上述不等式的几何意义（要求图示）；

（2）用上述不等式证明：

$$ab\leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\quad a,b>0,\ p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

十一、（15 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 绝对可积，函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 有界且满足

$$|g(x)-g(x')|\leq L|x-x'|,\quad L>0 \text{ 是常数}$$

证明：函数

$$F(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(xy)dx$$

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。

十二、（10 分）证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(\ln x)^2$ 在区间 $(0,1)$ 上一致收敛。

十三、（15 分）证明：

（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^n\pi x)}{2^n}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

（2）函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2^n\pi x)}{2^n}$ 在任何区间上不能逐次求导。