23 ③

重庆大学2005年硕士研究生入学考试试题

科目代码：431

科目名称：量子力学

请考生注意：

答题一律（包括填空题和选择题）答在答题纸或答题册上，答在试题上按零分计。

(本题 45 分，其中每小题 15 分)

一．已知一个处于一维运动的粒子系统，在某时刻t_0所处的状态可由状态函数$\psi(x)$描述：

$$\psi(x)=\begin{cases} xe^{-x/2}; & (x>0), \\ 0 \quad ; & (x\le 0). \end{cases}$$

(1) 求出在该时刻t_0，描述粒子系统的且还满足"归一化"要求的状态函数：

$$\psi_{(归一)}(x)=? \ [要求：\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\psi_{(归一)}(x)\right|^2 dx=1;(-\infty<x<+\infty)].$$

(2) 求出在该时刻t_0的粒子系统中，粒子出现在（一维坐标）空间里的位置分布的"最大"和"最小"几率密度：

$$\rho_{\max}=? \qquad \rho_{\min}=?$$

以及在"何点"处，达到这样的几率密度？

(3) 计算出在该时刻t_0的粒子系统中，粒子出现在（一维坐标）空间里的位置分布的平均值：

$$\bar{x}=?$$

(本题 35 分，其中（1）题 5 分，（2）、（3）、（4）题各 10 分)

二．已知一个处于位势$V=V(x)$：

$$V(x)=\begin{cases} 0 \quad ; & (0<x<\pi), \\ +\infty \ ; & (x\le 0,或x\ge\pi), \end{cases}$$

中的一维运动的粒子系统，粒子质量为 m.

(1) 写出描述该粒子系统演变规律的"薛定谔方程"及其相应的边界条件。

(2) 在如下两组"波函数集合"G_{I}和G_{II}中，存在一组集合里的波函数均满足（1），试通过验证[满足（1）的]方式寻求出这样的一组"波函数集合"；其中，

$$G_{\mathrm{I}}=\left\{\cos(nx)\cdot e^{-i\frac{n^2\hbar}{2m}t}\,\middle|\,n=1,2,3,\cdots\right\},$$

$$G_{\mathrm{II}}=\left\{\sin(nx)\cdot e^{-i\frac{n^2\hbar}{2m}t}\,\middle|\,n=1,2,3,\cdots\right\}.$$

(3) 在（2）中所寻找出的[满足（1）的一组]"波函数集合"里，试问：集合中的每个波函数均为描述该粒子系统的"何种（能量）特征"的演变状态？为什么？

(4) 若该粒子系统所处于的演变状态，可由如下满足"归一化"要求的一个"演变波函数"来描述：

$$
\begin{cases}
\psi(x,t)=\sqrt{\dfrac{2}{3\pi}}\sin x\left(1-2\sqrt{2}i\cos x\cdot e^{-i\frac{3\hbar}{2m}t}\right)\cdot e^{-i\frac{\hbar}{2m}t};\ \ (0<x<\pi), \\
\text{且满足}\displaystyle\int_0^{\pi}|\psi(x,t)|^2dx=1,
\end{cases}
$$

试求出：

（i） 该粒子系统中，在任意时刻t时观测到出现“能量”的“可能值”是什么？

（ii） 该粒子系统中，在任意时刻t时观测到出现“不同能量”的“几率”是什么？

提示：注意到$\sin x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$以后，再利用（2）的结论——考虑$\psi(x,t)$可以按“波函数集合”中的各个波函数作“展开”[即考虑如何将$\psi(x,t)$“改表”成这种意义下的“某种展开”]后，即可寻求出（4）的结果。

[注意：在考虑$\psi(x,t)$按“波函数集合”中的各个波函数作“展开”时，所采用这样的“波函数集合”中的“各个波函数”是否还需要满足“归一化”要求？以及怎样选取后才能满足此要求？]

（本题 30 分，其中每小题 10 分）

三．已知“某个”作一维运动的粒子系统，在随时间t的演变中始终处于某个“能量本征态”上，且在$t=0$时刻，描述其运动规律的状态函数$\psi(x)$为

$$
\psi(x)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{x+\pi}{2}\right); & (-\pi<x<\pi), \\ 0; & (x\le-\pi,\text{或}\ge\pi).\end{cases}
$$

又，该粒子系统满足的“薛定谔方程”及其相应的“边界条件”为

$$
\begin{cases}
i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=\left(\dfrac{-\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi(x,t); & (-\pi<x<\pi), \\
\Psi(x,t)\big|_{x\to-\pi}\to0,\ \Psi(x,t)\big|_{x\to\pi}\to0.
\end{cases}
$$

其中，m——粒子质量，$\Psi(x,t)$——描述该粒子系统中的“任何一个”演变状态的“演变波函数”

试求：

（1） 对于本题所指的“这个”粒子系统，寻求出描述“该系统”随时间t变化的（运动演变规律的）“演变波函数”

$$\psi(x,t)=?\quad(-\pi<x<\pi,t\text{—任意时刻})$$

（2） 在“这个”粒子系统中，任意时刻t时观测到粒子出现在（一维坐标）空间中的位置分布的几率密度：

$$\rho_1(x,t)=?\quad(-\pi<x<\pi,t\text{—任意时刻})$$

（3） 在“这个”粒子系统中，任意时刻t时观测到粒子出现在（一维动量）空间中的动量分布的几率密度：

$$\rho_2(p,t)=?\quad(-\infty<p<\infty,t\text{—任意时刻})$$

提示：对于（1），应首先利用“能量本征态”概念寻求出“这个”粒子系统所具有的（或所描述、表示的）“能量本征值”E——对此，只须利用状态函数$\psi(x)$应满足的“能量本征方程”：

$$\widehat{H}\cdot\psi(x)=E\psi(x);\ [\text{其中},\widehat{H}=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2};\ (-\pi<x<\pi)]$$

即可寻求出$E=?$

注意：对于（2）、（3），应考虑所采用的“演变波函数”$\psi(x,t)=?$还必须满足“归一化”要求：

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\psi(x,t)|^2dx=1.$$

（本题 20 分，其中每小题 10 分）

四．在由$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)$所描述的氢原子态中，其电子的“径向位置”分布的几率密度——即在氢原子中，其电子出现在$(r,r+dr)$球壳中的几率密度，可以表为

$$\rho_{nl}(r)=\left[R_{nl}(r)\right]^2 r^2 \qquad (0<r<+\infty)$$

（1） 说明：“这种几率密度”为什么可以采用“上述所表出的结果”给出？

（2） 证明：对于氢原子处于“基态”$(n=1,l=0,m=0)$情形，其电子的径向位置分布的几率密度在$r=a$（玻尔半径）处为最大：

$$\rho_{10}(a)\geq\rho_{10}(r); \qquad (0<r<+\infty).$$

以下“结果”，在解题中可直接引用：

（I） 描述氢原子系统的“能量本征态”：

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)=R_{nl}(r)\cdot Y_{lm}(\theta,\phi),$$

其中，n（主量子数）$=1,2,3,\cdots$；l（角量子数）$=0,1,2,\cdots,(n-1)$；m（磁量子数）$=-l,-l+1,\cdots,l-1,l$．

（II） 在“基态”中，涉及的“径向函数”$R_{10}(r)$和“角度函数”（球谐函数）$Y_{00}(\theta,\phi)$：

$$R_{10}(r)=\frac{2}{a^{3/2}}e^{-r/a};\ (a\text{—玻尔半径}),\quad Y_{00}(\theta,\phi)=1\big/\sqrt{4\pi}.$$

提示：对于（1）,应注意到$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)$满足“归一化”要求——采用球坐标$(r,\theta,\phi)$系，可表成：

$$\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left|\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)\right|^2 r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi=1.$$

此外，“球谐函数”还应满足如下“正交归一性”：

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}Y_{lm}^{*}(\theta,\phi)\cdot Y_{l'm'}(\theta,\phi)\sin\theta\, d\theta\, d\phi=\delta_{ll'}\delta_{mm'};$$

(其中，$l,l'=0,1,2,\cdots$；$m=-l,-l+1,\cdots,l-1,l$；$m'=-l',-l'+1,\cdots,l'-1,l'$).

（本题 20 分，其中每小题 5 分）

五．在量子力学中，粒子的坐标分量算符：$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$与动量分量算符：$\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{p}_z$之间的对易式为“基本对易式”，且可表成：

$$[\hat{x}_\alpha,\hat{x}_\beta]=0,\ [\hat{p}_\alpha,\hat{p}_\beta]=0,\ [\hat{x}_\alpha,\hat{p}_\beta]=i\hbar\delta_{\alpha\beta};$$

(其中，$\alpha,\beta=1,2,3$; 且$\hat{x}_1=\hat{x}$, $\hat{x}_2=\hat{y}$, $\hat{x}_3=\hat{z}$, 以及$\hat{p}_1=\hat{p}_x$, $\hat{p}_2=\hat{p}_y$, $\hat{p}_3=\hat{p}_z$)

试利用“基本对易式”，证明如下对易式：

(1) $[\hat{x},\hat{l}_x]=0$, (2) $[\hat{l}_y,\hat{z}]=i\hbar\hat{x}$,

(3) $[\hat{l}_x,\hat{p}_y]=i\hbar\hat{p}_z$, (4) $[\hat{l}_x,\hat{l}_z]=-i\hbar\hat{l}_y$.

其中，$\hat{l}_x,\hat{l}_y,\hat{l}_z$为角动量分量算符，且满足定义：

（角动量矢量算符）$\hat{\vec{l}}=\hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{p}}=\hat{l}_x\vec{e}_x+\hat{l}_y\vec{e}_y+\hat{l}_z\vec{e}_z$;（$\hat{\vec{r}}=\hat{x}\vec{e}_x+\hat{y}\vec{e}_y+\hat{z}\vec{e}_z$, $\hat{\vec{p}}=\hat{p}_x\vec{e}_x+\hat{p}_y\vec{e}_y+\hat{p}_z\vec{e}_z$).