重庆大学2005年硕士研究生入学考试试题

科目代码：330

科目名称：数学分析

请考生注意：

答题一律（包括填空题和选择题）答在答题纸或答题册上，答在试题上按零分计。

第一部分 计算题（共 70 分）

一、(10分）设函数

$$f(x)=\frac{\cos(x-1)-e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}+\frac{1}{12}(x-1)^4}{(x-1)^6}$$

试定义 $f(1)$ 的数值，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续。

二、(10分）设参数方程 $x=f'(t)$，$y=tf'(t)-f(t)$，其中函数 $f(t)$ 可以求导足够次数，求一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 和二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

三、(10分）求不定积分 $\int\frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$。

四、(10分）求函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ 的极值与拐点，并求拐点处的切线方程。

五、(10分）判断函数列 $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$ 在区间 $(0,1)$ 上的一致收敛性（说明理由）。

六、(10分）设 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 有二阶连续导数，$u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$，求

$$x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$$

七、(10分）求由曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(a,b,c>0)$ 所围空间区域的体积。

第二部分 证明题（共 80 分）

八、(12分）

(1) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近有定义， 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在（有限）的充分必要条件

是：对任意以x_0为极限的数列 $\{x_n\}$，$x_n \neq x_0$，都有数列$\{f(x_n)\}$收敛；

（2）判断极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$是否存在（说明理由）。

九、（12 分）设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，

（1）证明：$f(x)$在$[a,b]$上一定有最大值和最小值（选最小值证明）；

（2）进一步，还假设$f(x)$在$[a,b]$上处处不为零，试用定义证明函数$\dfrac{1}{f^2(x)}$在$[a,b]$上连续。

十、（10 分）设函数$f(x)$在开区间(a,b)内存在二阶导数$f''(x)$，且在(a,b)内$f''(x)>0$，证明：对于任意两点$x_1,x_2\in(a,b)$，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

十一、（12 分）设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上可微，$f(0)=0$，且在$[0,1]$内$0<f'(x)<1$，

证明：

（1）对于任意$x\in(0,1)$，$\int_0^x f(t)dt>\dfrac{1}{2}f^2(x)$；

（2）$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2>\int_0^1 f^3(x)dx$。

十二、（10 分）设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$连续、非负，且广义积分$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)dx=0$$

十三、（12 分）证明含参广义积分$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x dx$在$(0,+\infty)$连续，但非一致收敛。

十四、（12 分）设$h_n(x)$在$[a,b)$连续，且

$$f_n(x)\le h_n(x)\le g_n(x),\qquad \forall x\in(a,b)$$

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)$在$(a,b)$上收敛，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}h_n(a)$发散，证明：

（1）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}h_n(x)$在$(a,b)$上收敛；

（2）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}h_n(x)$在$(a,b)$上非一致收敛。