重庆大学2005年硕士研究生入学考试试题

科目代码：428

科目名称：高等代数

考生注意：

答题一律（包括填空题和选择题）答在答题纸或答题册上，答在试题上按零分计。

一．（10分）计算行列式：$\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$

二．（15分）λ,μ 为何值时，方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+\mu x_2+x_3=3 \\ x_1+2\mu x_2+x_3=4 \end{cases}$ 有惟一解？无解？有无穷解？无穷解时并求其全部解。

三．（15分）设 $f(x)=x^3+6x^2+3px+8$，试确定 p 的值使 $f(x)$ 有重根并求其根。

四．（15分）设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 且A与B相似。

1．求 α,β 的值；

2．求可逆阵P使 $P^{-1}AP=B$。

五．（15分）在 $P[x]_4$ 中定义内积：$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx, f(x),g(x)\in P[x]_4$

并定义线性变换A：A $\varepsilon_i=\eta_i, i=1,2,3,4$

$$\varepsilon_1=\frac{1}{2}(1+x+x^2+x^3) \qquad \eta_1=2x+x^2-x^3$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{2}(-1-x+x^2+x^3) \qquad \eta_2=-1-x^2-2x^3$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{2}(-1+x-x^2+x^3) \qquad \eta_3=-2x-x^2+x^3$$

$$\varepsilon_4=\frac{1}{2}(-1+x+x^2-x^3) \qquad \eta_4=1-4x-x^2$$

求 A 的核空间的一个标准正交基。

六.（15 分）设向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以由向量组 B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示且 R（A）=R（B）。证明向量组 A 与向量组 B 等价。

七.（15 分）设 xoy 平面上 n 个结点 $M_i(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n(n\geq 3)$。证明

$$M_1,M_2,\cdots M_n \text{ 在同一条直线上} \Leftrightarrow R\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}\right)=2$$

八.（10 分）设 A，B 均为 n 阶实对称阵，A 的特征值均小于 a，B 的特征值均小于 b。

证明：对任意的 k>a+b，A+B－kE 是负定矩阵。

九.（10 分）设 A 为方阵，$g(\lambda)$

是 A 的最小多项式，$f(\lambda)$ 为任意多项式。

证明：$f(A)$ 可逆 $\Leftrightarrow (f(\lambda),g(\lambda))=1$

十.（20 分）设 σ 为 n 维线性空间 V 的一个线性变换且 $\sigma^2=\sigma$。证明：

1. σ 的特征值为 0，1；
2. 设 V_0,V_1 分别为 0，1 对应的特征子空间，则 $V=V_0\oplus V_1$
3. 若 σ 只有 0 特征值，则 σ 为零变换。

十一.（10 分）设 A 为 n 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵且 $A_{11}\neq 0,b\neq 0$，其中 A_{11} 为 A 的 a_{11} 对应的代数余子式。证明：

$AX=b$ 有无穷多个解 $\Leftrightarrow b$ 是 $A^*X=0$ 的解。