广西民族大学 2007 年硕士研究生入学考试试题

（所有试题答案必须写在答题纸上，答案写在试卷上无效）

学科专业：基础数学、计算数学、应用数学　　　　　　研究方向：所有方向

考试科目：　高等代数　　　　　　　　　　　　　　　　试卷代号：A

一、计算行列式(20 分)

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$；　2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$ $(n \geq 2)$（注：对角线上元素分别为$1,2,\cdots n$，其余元素为 3）

二、(15 分) 设 b 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是对应齐次线性方程组的一个基础解系，证明：（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r},b$ 线性无关；（2）$\alpha_1+b,\alpha_2+b,\cdots,\alpha_{n-r}+b,b$ 线性无关。

三、(15 分) a 取何值时下列方程组有解？并求其解：

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=a \\ x_1+x_2+ax_3=a^2 \end{cases}$$

四、(20 分) 证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$，其中 A 是 $n\times n$ 矩阵（$n>2$）。

五、(15 分) 设 A 是一个 n 阶实对称矩阵，且 $|A|<0$。证明：存在实 n 维向量 x 使得 $x'Ax<0$。

六、(15 分) 设有向量组 $a_1=(1,0,2,1),a_2=(2,0,1,-1),a_3=(3,0,3,0),b_1=(1,1,0,1),b_2=(4,1,3,1)$，令 $V_1=L(a_1,a_2,a_3),V_2=L(b_1,b_2)$。求 V_1+V_2 的维数，并求一组基。

七、(15 分) 设 T 为 n 维空间的一个线性变换，且 $T^2=I$。证明：（1）T 的特征根只能是±1；（2）$V=V_1\oplus V_2$，其中 V_1 是 T 的属于特征根 1 的特征子空间，V_2 是 T 的属于特征根 -1 的特征子空间。

八、(15 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

九、(20 分) 设 n 阶实矩阵 A 的特征值全为实数，且 A 的一阶主子式之和、二阶主子式之和全为 0，证明 $A^n=O$。