广 西 民 族 大 学

2010 年硕士研究生入学考试初试自命题科目试题

（试卷代号：A 卷）

科目代码：622

科目名称：**数学分析**

适用学科专业：基础数学、计算数学、应用数学

研究方向：

命题教师签名：

考生须知

1. 答案必须写在答题纸上，写在试题上无效。
2. 答题时一律使用蓝、黑色墨水笔作答，用其它笔答题不给分。
3. 交卷时，请配合监考人员验收，并请监考人员在准考证相应位置签字（作为考生交卷的凭证）。否则，产生的一切后果由考生自负。

一、(20 分，每小题 10 分)求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3})^n$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\cot x)$.

二、(10 分)设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，$0\le f'(x)\le f(x)$ 且 $f(0)=0$. 证明：在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$.

三、(30 分，每小题 10 分)计算下列积分

(1) $\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$ (其中 $a>0$).

(2) $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其中 D 是以 $y=x, y=x+a, y=a$ 和 $y=3a$ $(a>0)$ 为边的平行四边形.

(3) $I=\iiint\limits_V \ln(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dxdydz$，其中 V 是椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

四、(15 分)设 $p_1(x)$ 为 $[a,b]$ 上的 k 次多项式，$p_2(x)$ 为 $[b,c]$ 上的 k 次多项式，$p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 在点 $x=b$ 处连续，且一阶到 r 阶导数均连续. 证明必存在 $k-r-1$ 次多项式 $q(x)$，使得成立 $p_2(x)=p_1(x)+(x-b)^{r+1}q(x)$.

五、(15 分)设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$，$0<a<b$，证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=(f(0)-k)\ln\frac{b}{a}.$$

六、(15 分)已知 $u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$，求二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$，并给出二者相等的条件.

七、(15 分)利用 Lagrange 乘数法, 求解 $f(x,y,z)=x^2+y^2$ 在 $x+y=1$ 条件下的极值.

八、(15 分)若 L 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-5=0$ 上的闭曲线，它所包围区域的面积为 A，求：

$$\oint_L\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}，(其中 L 依正向进行).$$

九、(15 分)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，但不是常数，且有 $f(a)=f(b)=0$，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$|f'(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx.$$