

# 广西民族大学

## 2011年硕士研究生入学考试初试自命题科目试题

(试卷代号: B卷)

科目代码: 622

科目名称: 数学分析

适用学科专业: 基础数学、计算数学、应用数学

研究方向: \_\_\_\_\_

命题教师签名: \_\_\_\_\_

### 考生须知

1. 答案必须写在答题纸上, 写在试题上无效。
2. 答题时一律使用蓝、黑色墨水笔作答, 用其它笔答题不给分。
3. 交卷时, 请配合监考人员验收, 并请监考人员在准考证相应位置签字(作为考生交卷的凭证)。否则, 产生的一切后果由考生自负。

一、求下列极限（每小题 10 分，共 2 小题，共 20 分）

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right].$$

二、(15 分). 求  $a, b$  使下列函数在  $x = 0$  处可导:  $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \geq 0, \\ x^2 + 1, & x < 0. \end{cases}$

三、(15 分) 设平面  $x + y + z = 3$  截三坐标轴于  $A, B, C$  三点,  $O$  为坐标原点,  $P(x, y, z)$  为三角形  $ABC$  上一点, 以  $OP$  为对角线, 三坐标平面为三面作一长方体, 求最大体积.

四、(20 分) 证明函数  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$  在原点  $(0, 0)$  连续且偏导数

存在, 但偏导数在  $(0, 0)$  不连续, 而  $f$  在原点  $(0, 0)$  可微.

五、(15 分) 设  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  可微, 且  $f'(x)$  在  $(a, b)$  有界. 证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  一致连续.

六、计算下列积分（每小题 10 分，共 3 小题，共 30 分）

$$(1) \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \sin^2 x} dx;$$

$$(2) \int_0^2 [e^x] dx \quad (\text{注 } [ \cdot ] \text{ 表取整函数});$$

$$(3) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad \text{其中 } \Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

七、(10 分) 计算积分  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$  的值, 并证明它也等于数项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$  的和.

八、(15 分) 计算  $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , 其中  $\Sigma$  为圆锥曲面  $z^2 = x^2 + y^2$  被平面  $z = 0, z = 2$  所截部分的外侧.

九、(10 分) 设函数列  $\{f_n(x)\}$  满足下列条件:

$$1) \forall n, f_n(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 连续且有 } f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad (x \in [a, b]),$$

$$2) \{f_n(x)\} \text{ 处处收敛于 } [a, b] \text{ 上的连续函数 } s(x).$$

证明:  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $s(x)$ .