2011年攻读硕士研究生入学考试试题

（846）高等代数

一、(本题20分)

设线性方程组$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3 \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 = a_2^3 \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3 \\ x_1 + a_4x_2 + a_4^2x_3 = a_4^3 \end{cases}$

1、证明：若a_1,a_2,a_3,a_4两两不相等，则此线性方程组无解；

2、设 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k(k \neq 0)$. 且已知$\beta_1,\beta_2$是该线性方程组的两个解，其中$\beta_1 = (-1,1,1)^T, \beta_2 = (1,1,-1)^T$, 此处记号$\alpha^T$为$\alpha$的转置。写出此线性方程组的通解。

二、(本题满分20分) $\alpha = (a_1,a_2,\cdots,a_n)^T, \beta = (b_1,b_2,\cdots b_n)^T$是$n$维列向量，其中$a_i$,b_i均为非零常数，$i = 1,2,\cdots,n$。α^T为α的转置，β^T为β的转置，设矩阵$A = \alpha\beta^T$

（1）求矩阵A的秩$r(A)$

（2）求A^2，A^{10}；

（3）求齐次线性方程组$AX = 0$的通解

（4）求矩阵A的全部特征值与其对应的特征向量

三、(本题20分) 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$,

（1） 写出二次型f的矩阵表达式；

（2） 用正交变换把二次型f化为标准型，并写出相应的正交矩阵。

四、(本题20分) 已知向量组$(I)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,(II)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,(III)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$.如果各向量组的秩分别为 R(*I*)=R(*II*)=3, R(*III*)=4. 证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 - \alpha_4$.的秩为4。

五、(本题20分)设$O(n,Z)$为整系数正交矩阵所成之集合，$O^*(n,Z)$（$O^-(n,Z)$）是其行列式为1（-1）的正交矩阵所成之子集合。

1、确定$O(n,Z)$中元素个数 2、证明$O^*(n,Z)$与$O^-(n,Z)$中元素个数相等。

六、（本题满分 20 分）

$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，$\alpha,\beta$ 是三维列向量，α^T 为 α 的转置，β^T 为 β 的转置

（1）证 $r(A)\le 2$；（2）若 α,β 线性相关，则 $r(A)<2$.

七、（本题 30 分）设设 V 是 n 维列欧几里德空间，即 $V=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\mid a_i\in R,i=1,2,\cdots n\}$，$\xi$ 是 V 的单位向量，定义 V 上的变换 Ψ 如下：对任意 $\alpha\in V$，$\Psi_\xi(\alpha)=\alpha-2\xi^T\alpha\xi$，此处 $\xi^T\alpha\in R$，R 为实数域

1、证明 Ψ_ξ 是 V 上线性变换；**2**、证明 Ψ_ξ 是 V 上正交变换，

2、设 $W_1=\{\beta\in V\mid\beta^T\xi=0\}$，证明 Ψ_ξ 在 W_1 上的限制为恒等变换

3、设 W_2 为由向量 ξ 所张成的 **1** 维线性空间，证明 Ψ_ξ 在 W_2 上的限制为-1，即

$\Psi_\xi|_{W_2}=-1$　4、证明 $W_1=W_2^{\perp}$

5、证明 $\Psi_\xi{}^2=1_V$　6、试说明当 $n=3$ 时 Ψ_ξ 的几何意义

169