

广东工业大学

2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 (代码) 名称: (602) 数学分析

满分 150 分

(考生注意: 试卷封面需填写自己的准考证编号, 答完后连同本试题一并交回!)

一. 填空题: (每小题 6 分, 共 42 分)

1. 当 $\alpha =$ _____ 时, x^α 与 $\frac{1}{1+x} - (1-x)$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的同阶无穷小量。

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(1-x)}{(x-1)^2(x+3)} =$ _____。

3. $y = \arccos \frac{1}{1+x^2}$, 则 $y' =$ _____。

4. $\int \ln^2 x dx =$ _____。

5. $u = xe^{yz} + e^{-z} + y$, $du =$ _____。

6. $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy =$ _____。

7. $L = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, 取逆时针方向, 则 $\oint_L x dy - y dx =$ _____。

二、(10 分) 求函数 $y = \frac{x}{\sin x}$ 的间断点及其类型。

三、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 求证 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$ 。

四、(12 分) 设 f 为可微函数, $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$, 且方程 $3x + 2y^2 + z^3 = 6xyz$ 确定了

隐函数 $z = f(x, y)$, 求 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1,1,1)}$ 。

五、(12 分) 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与球面 $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ 所围立体的体积。

六、(15分) 应用格林公式计算曲线积分 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为任一包含原点的闭区域的边界曲线。

七、(15分) 设 $a^2 - 3b < 0$, 证明方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有且仅有一实根。

八、(15分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

九、(共 17 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(1) = 0$, 证明:

(1) $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛; (7 分)

(2) $\{f(x)x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛 (10 分)