2004 年深圳大学硕士研究生入学考试试题

专业：应用数学　　考试科目：高等代数

一、必做题（共 120 分）

1.（10 分）设 5 阶方阵 $A=[\alpha, r_1, r_2, r_3, r_4], B=[r_1, r_2, r_3, r_4, \alpha+\beta]$，其中 $\alpha, \beta, r_1, r_2, r_3, r_4$ 均为 5 维列向量，并且|A|=4，|B|=5，求 $|2\beta, r_1, r_2, r_3, r_4|=?$

2.（15 分）计算 n 阶行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3.（15 分）设 A 为 5 阶方阵，并且|A|=5，计算

（1）$|A^*|=?$　　（2）$|(A^*)^*|=?$

（3）$|(A^*)^{-1}|=?$　　（4）$|3A^{-1}-2A^*|=?$

4.（40 分）设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是三维线性空间 V 的两组基，V 上的线性变换 $\underset{\sim}{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为

$$S=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

（1）求 $\underset{\sim}{A}$ 的全部特征值和分别属于不同特征值之间的极大线性无关的特征向量

（2）求一可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角形

（3）设 $X_0=(1,-1,2)'$，计算 A^kX_0，其中 k 为任意正整数

（4）求一正交矩阵 Q 使得 $Q'AQ$ 为对角线

（5）求 $\underset{\sim}{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵

5.（15 分）求由向量 α_1, α_2 生成的子空间 W_1 与向量 β_1, β_2 生成的子空间 W_2 的交与和的维数及一组基，其中

$$\begin{cases} \alpha_1=(2,0,1,3,-1) \\ \alpha_2=(0,-2,1,5,-3) \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1=(1,1,0,-1,1) \\ \beta_2=(1,-3,2,9,5) \end{cases}$$

6.（15 分）已知 n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots x_n)=x_1x_2+x_3x_4+\cdots+x_{2n-1}x_{2n}$，用非退化的线性替

换将该二次型化成标准型，并确定它的秩和符号差

7.（10 分）设齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$的系数行列式 D=0，

而 D 中某一元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$，证明：这个方程的解都可以写成 $kA_{i1},kA_{i2}\cdots kA_{in}$ 的形式，此处 k 是任意数

二、选做题：以下五题任选三题（共 30 分）

8.（10 分）设矩阵 $A_{n\times n}$ 满足 $A^2=A$，求证：

（1）：rank(A)+rank(A-E)=n

(2): A 的特征值只能为 0 和 1

9.（10 分）设 $\underline{A}$ 是欧氏空间 V 的一个线性变换，求证：如果 $\underline{A}$ 保持内积不变，即对任意的 $\alpha,\beta\in V$，都有 $(\underline{A}\alpha,\underline{A}\beta)=(\alpha,\beta)$，那么，$\underline{A}$ 一定是线性的，因而它是正交变换

10.（10 分）A，B 均为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位矩阵，并且 E-AB 可逆，证明：E-BA 也可逆

11.（10 分）设 r 为一整数，证明：如果一 n×m 级(r<n,r<m)矩阵 A 有一 r 阶子式不为零，并且 A 的含此 r 阶子式的任一个 r+1 阶子式均为零，则 rank(A)=r

12.（10 分）设 A 是一个 m×n 级实矩阵，证明：齐次线性方程组 AX=0 的解空间与 $A'AX=0$ 的解空间相等