2004 年深圳大学硕士研究生入学考试试题

专业：应用数学　　考试科目：数学分析

一、（18 分），求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$　　　2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

二、（6 分）证明不等式：　$\ln(1+x)\ge\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x}, x\ge 0$

三、（6 分）问 a,b 为何值时。点（1，3）为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点

四、（30 分）求导与微分

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x} & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$　且 $g(0)=g'(0)=0, g''(0)=3$。求 $f'(0)$

2. 设 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$，试求 $f^{(n)}(0)$，其中 $n\ge 1$ 为自然数

3. 设 f 为具有二阶连续偏导数的二元函数，$z=f(x,\frac{y}{x})$, 求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

五（30 分）求下列积分

1. $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$　　　2. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$　　　3. $\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy$

4. $\iiint\limits_V zdxdydz$,其中，V 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 与 $z\ge 0$ 所围的区域

5. $\int_L x^2ds$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截面的四周

六. （10 分）设 $a_n>0$，证明数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\}$ 与级数 $\sum a_n$，同时收敛或同时发散。

七. （10 分）讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，在原点 $(0,0)$ 的连续性与可微性。

八. （10 分）设 $f(x)$ 为连续可导函数，若曲线积分 $\int_L[e^x+2f(x)]ydx-f(x)dy$ 与路径无关，且 $f(0)=0$，试求：

（1） $f(x)$　　　（2） $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+2f(x)]ydx-f(x)dy$

九. （30 分）在下列的证明题中任选 3 小题

1．若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，且对任何 $x\in[a,b]$，都存在相应的 $y\in[a,b]$，使得 $|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$，证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$

2．设 $f(x)$ 在点 a 有二阶导数，证明：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$

3．用致密性定理证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

4．设 $a_1>0, a_n=\frac{1}{a_{n-1}}\int_0^{a_{n-1}}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx, n=2,3\ldots$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\frac{1}{2}$ *（该题可能错误！）*。

5．若正项级数 $\sum u_n$ 收敛，且数列 $\{u_n\}$ 单调递减，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$。