2005年深圳大学硕士研究生入学考试试题

专业：应用数学　　考试科目：高等代数

一、必做题（共120分）

1.（15分）设下述矩阵有三个线性无关的特征向量，求x，y满足的关系式

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$$

2．15分）计算下述n阶行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&x&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&x+a_1\end{vmatrix}$$

3.（15分）求解矩阵方程 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1&-2\\-1&2&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

4.（18分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$，经过正交变换X=TY

化为标准型 $f=y_2^2+2y_3^2$

（1）：试求常数a,b

（2）：判断该二次型是否正定

5.（30 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 和 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 是三维线性空间 V 的两组基，线性变换 $\underline{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-2&0&1&1\\0&-1&2&1\\-1&0&2&-1\\-4&0&1&3\end{bmatrix}$$

（1）：求 $\underline{A}$ 的全部特征值和分别属于不同特征值的极大无关的特征向量；判断 $\underline{A}$ 是否能对角化

（2）：求现象变换 $\underline{A}$ 的值域 $\underline{A}$ V 的维数和一组基

（3）：求线性变换 $\underline{A}$ 的核的维数和一组基

6.（12分）设A是数域P上的 $n\times m$ 级矩阵，证明：A的m个列向量线性无关的充分必要条件为存在n阶可逆方阵P使得

$$A = P\begin{bmatrix} E_m \\ O \end{bmatrix}$$

7.（15 分）设 A 为 n 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2 \cdots \alpha_n$ 是 n 维线性无关的列向量组，并且 $A\alpha_i = \alpha_{i+1}$，，

$i = 1,2,\cdots,n-1, A\alpha_n = \alpha_1$，求 A 的行列式 $|A|$

二、选做题：以下五题中任选三题（共 30 分）

8.（10 分）设 $\underline{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的一线性变换，证明：$\underline{A}$ 是正交变换的充分必要条件是 $\underline{A}$ 在 V 中的任意一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵

9.（10 分）证明：数域 P 上 $m\times n$ 级矩阵 A 的列向量生成的向量空间与 AA' 的列向量生成的向量空间相等

10.（10 分）设 A，B 分别是数域 P 上的 $n\times m$ 和 $m\times n$ 级矩阵，并且 $\lambda \neq 0$，证明：$|\lambda E_n = AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|$

11.（10 分）设 A 是 n 级矩阵(n>1)，试证明：

$$\operatorname{rank}(A^*) = \begin{cases} n, & \operatorname{rank}(A) = n \\ 1, & \operatorname{rank}(A) = n-1 \\ 0, & \operatorname{rank}(A) < n-1 \end{cases}$$

12.（10 分）证明：在一个欧氏空间中，对于任意向量 ξ,η，以下等式成立：

$$|\xi+\eta|^2 + |\xi-\eta|^2 = 2|\xi|^2 + 2|\eta|^2$$