2007年深圳大学硕士研究生入学考试试题

（答题必须写在答题纸上，写在本试题纸上无效）

专业：应用数学、基础数学　　考试科目：高等代数

（本卷共11题，其中1-7题必做，8-11题任选3题，共要求做10题）

1. （15分）计算下述三对角 n 级行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

2. （15分）讨论 λ 取什么值时，下述线性方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在有无穷多解的情形，求出其一般解.

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda^2 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=1 \end{cases}$$

3. （15分）利用矩阵运算求矩阵 X，使得

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. （15分）设 $q(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个 n 元实二次型，证明存在实数 λ，使得下述二次型为正定：

$$\tilde{q}(x_1,\cdots,x_n)=q(x_1,\cdots,x_n)-(\lambda x_1^{\,2}+\cdots+\lambda x_n^{\,2})$$

5. （20分）

(1)设 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 均是三维列向量，并且 α_1,α_2 和 β_1,β_2 分别线性无关. 证明存在一个非零向量 ξ 使得 ξ 可由 α_1,α_2,和 β_1,β_2 分别线性表出.

(2) 取 $\alpha_1=(1,3,4)'$, $\alpha_2=(2,5,5)'$, $\beta_1=(2,3,-1)'$, $\beta_2=(-3,-4,3)'$. 求(1)中的 ξ.

6. (20 分) 设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足关系式:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

并且 $a_0=1$, $b_0=0$. 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项 a_n 和 b_n, 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

7. (20 分) 设 P 为一数域. 在 $P[x]_n\ (n>1)$ 中，求微分变换 D 的所有特征根；并证明 D 不能对角化.

(以下四题中任选三题--共 30 分)

8. (10 分) 设 $B=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$ 是由数域 P 上矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ 经若干初等行变换得到得矩阵, 其中设$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 和 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 分别是 B 和 A 的列向量组. 证明：B 的任意部分列向量组$\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{ir}$ 满足 $k_1\beta_{i1}+k_2\beta_{i2}+\ldots+k_r\beta_{ir}=0$ 当且仅当 A 的对应的部分列向量组 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ir}$ 也满足 $k_1\alpha_{i1}+k_2\alpha_{i2}+\ldots+k_r\alpha_{ir}=0$, 其中 $k_1, k_2, \ldots, k_r\in P$.

9. (10 分) 设域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换 $\underline{A}$ 有 n 个不同的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. 而 W 是 $\underline{A}$ 的一个 r 维的不变子空间. 证明：$\underline{A}$ 在 W 上的限制 $\underline{A}|_W$ 有 r 个不同的特征值，并且为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 中的 r 个.

10. (10 分) 证明：n 维欧氏空间 V 上的线性变换 $\underline{A}$ 是正交变换当且仅当 $\underline{A}$ 在任意标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

11. (10 分) 设 $f(x)$, $g(x)$和 $h(x)$均是数域 F 上的多项式, 并且 $h(x)$的首项系数为 1. 证明:

$$(f(x)h(x),\ g(x)h(x))=(f(x),\ g(x))h(x)$$

其中记号$(q(x), p(x))$表多项式 $q(x)$和 $p(x)$的首项系数为 1 的最大公因式.