考试科目： 数学分析

一、(8 分) (1) 写出极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to-\infty}} f(x,y)=A$ 的精确定义;

(2) 用定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{3x^2+2y^2}=+\infty$.

二、(8 分)设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

讨论 $f(x,y)$ 在(0, 0)处的连续性与可微性.

三、计算下列各题(共 8 题, 每题 8 分, 共 64 分):

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+\cos x-1}{x^3\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}$.

2. 设 $a>1$，y_n 由以下方法确定:

$$y_1=\frac{1}{a},\ y_n=\frac{1}{a}-\frac{y_{n-1}^2}{a},\ (n=2,\ 3,\ \cdots),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3. 设 $f(x)=\int_x^{x^2}\dfrac{\sin tx}{t}\mathrm{d}t$，求 $f'(x)$.

4. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{2n}+\dfrac{1}{(2n)^2-1}\right)$ 的和.

5. 设函数在 $\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$ 内可微，且设 $f(1,1)=1$，$f_x(1,1)=f_y(1,1)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^x=xy^2$ 确定. 令 $g(x)=f\left(x^2,f\left(x^2,y\right)\right)$，求 $g'(1)$.

6. 求 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left|\dfrac{1}{4}-x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ 的收敛半径和收敛域，其中 $a>0$，$b>0$.

8. 求 $\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2+y^2}$ 的上侧.

四、证明下列各题(共 5 题，每题 14 分，共 70 分)：

1. 证明不等式 $\ln(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}\quad(x>0)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+f'(x)\right)=0$. 令 $g(x)=f(x)+f'(x)$，证明：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\int_1^x g(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=0$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

3. 设 $f_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$，其中 $f(x)$ 为连续函数，证明函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ $(b>a+1)$ 上一致收敛于 $\int_x^{x+1}f(t)\mathrm{d}t$.

4. 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 为两个二次连续可微的函数，且使得对任何封闭曲线 C 如下曲线积分

$$I=\oint_C P(x+\alpha,y+\beta)\mathrm{d}x+Q(x+\alpha,y+\beta)\mathrm{d}y$$

与常数 α 和 β 无关. 试证明

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=k,$$

其中 k 为常数.

5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可微，且 $ab>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{a^m-b^m}\begin{vmatrix}a^m & b^m\\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\frac{\xi}{m}f'(\xi),$$

其中 m 为正整数.