深圳大学 2009 年硕士生入学考试初试试题

（答题必须写在答题纸上，写在本试题纸上无效）

专业：基础数学、应用数学

考试科目：高等代数

(本卷共 11 题，其中 1-7 题必做，8-11 题任选 3 题，共要求做 10 题)

1. (15 分) 计算下述 n 阶行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a-b & a & \cdots & a+b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-b & a-b & a-b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

2. (15 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中，设 S_1 是由向量 $\alpha_1=(1, 1, 1)$，$\alpha_2=(2, 3, 4)$ 生成的子空间，S_2 是由向量 $\beta_1=(3, 4, 5)$，$\beta_2=(0, 1, 2)$ 生成的子空间．证明 $S_1=S_2$ 并计算其维数．

3. (15 分) 求 t 的值，使得多项式 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根．

4. (15 分) 设 A 数域 P 上一 n 级矩阵．证明：A 是反对称（即 A 的转置 $A'=-A$）当且仅当对 P 上的任意 n 维列向量 α，有 $\alpha' A\alpha=0$.

5. (20 分) 已知 $\mathbb{R}$ 上的矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以对角化，求 x 的值．

6. (20 分) 设 A 和 B 分别为 $s\times n$ 和 $n\times s$ 级矩阵，E_s 表示 s 级单位矩阵．证明：

1) $|E_s-AB|=|E_n-BA|$;

2) AB 和 BA 有相同的非零特征值．

7. (20 分) 设 $D=\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ 是一个分块矩阵，其中 A 和 B 均是 n 阶方阵，并且 B 可逆．证明：

1) 可对 D 仅施行列的初等变换可将 D 化为形如 $F=\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ 的矩阵，其中 E 是 n 阶单位矩阵．

2) 在上述矩阵 F 中，$C=AB^{-1}$ (这提供了一个利用初等变换直接判断 B 是否可逆，并且进而计算 AB^{-1} 的方法)．

（以下四题中任选三题，共 **30** 分）

8. (10 分) 设 $\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,(n>1)$ 为数域 F 上向量空间 F^n 中的一个非零向量．令 n 阶矩阵

$$A=\alpha'\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}.$$

证明：

1) $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$ 是矩阵 A 的唯一的非零特征值，并且重数为 1；

2) 0 是矩阵 A 的 $n-1$ 重特征值；

3) A 可以对角化．

9. (10 分) 设 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ 是数域 P 上的多项式，并且

$$(x^m-a)\left|\sum_{i=1}^{m} f_i(x^m)x^{i-1},\right. \quad a\in P,\ a\neq 0$$

证明：$(x-a)\,|\,f_i(x),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$.

10. (10 分) 设 A 为 $n\,(n>2)$ 阶矩阵．证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}\cdot A$，这里 A^* 表示 A 的伴随矩阵．

11. (10 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 n 维向量空间 V 的一组基，A 是 $n\times n$ 级矩阵，并且

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

证明：

1) 如果 A 的秩为 r，并且 A 的列向量组中第 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ 列为其极大无关组，则向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的秩也为 r，并且 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 是其极大无关组；

2) 反之，如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的秩为 r，并且 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 是其极大无关组，则 A 的秩为 r，并且 A 的列向量组中第 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ 列为其极大无关组.