

深圳大学 2011 年硕士生入学考试初试试题

(答题必须写在答题纸上, 写在本试题纸上无效)

专业: _____ 基础数学、应用数学

考试科目: _____ 高等代数 _____ 科目代码: _____ 912

(本卷共 11 题, 其中 1-7 题必做, 8-11 题任选 3 题, 共要求做 10 题)

1. (15 分) 计算下述 n 阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

2. (15 分) 设 F 是一数域, 并且在多项式环 $F[x]$ 中 $x+1$ 整除多项式 $f(x^{2n+1})$. 证明: $x^{2n+1}+1$ 也整除 $f(x^{2n+1})$.

3. (15 分) 设四阶实矩阵 $A=(a_{ij})_{4 \times 4}$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 并且 $A_{ij} = -a_{ij}$, $i=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, 3, 4$. 如果 $a_{11} \neq 0$, 计算行列式 $\det(A)$ 的值.

4. (15 分) 应用 Hamilton-Cayley 定理: 设 A 是数域 F 上一 n 阶方阵, 那么 A 的特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$ 是 A 的零化多项式, 即 $f(A) = O$. 计算 $3A^{10} - 3A^8 + A^3$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. (20 分) 设非零向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表出. 证明:

(i) 秩 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \leq$ 秩 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$;

(ii) 如果秩 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} = r$, 则可将向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 中某 r 个向量用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中 r 个线性无关的向量替换, 使得新向量组与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 等价.

6. (20 分) 设 n 阶实对称矩阵 A 和 B 均正定, 并且满足 $AB=BA$. 证明

(i) 乘积 AB 仍正定;

(ii) λ 的多项式 $|\lambda A - B|$ 的根均为正实数.

7. (20 分) 设 A 为实数域上 $n \times s$ 级矩阵. 证明

(i) 秩 $(A^T A) =$ 秩 (A) ;

(ii) 对任意的 $n \times t$ 级实矩阵 B , 存在 $s \times t$ 级矩阵 C , 使得 $A^T A C = A^T B$.

(接下页)

(以下四题中任选三题, 共 30 分)

8. (10 分) 设 W 是数域 F 上向量空间 V 的一个可逆线性变换 σ 的有限维不变子空间. 证明

- (i) σ 在 W 上的限制 $\sigma|_W$ 是 W 上的可逆的线性变换;
- (ii) W 是 σ 的逆变换 σ^{-1} 的不变子空间, 并且 $(\sigma|_W)^{-1} = \sigma^{-1}|_W$.

9. (10 分) 下列级数称为 Fibonacci 级数:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, \dots$$

通项用递推表达式表示为 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. 用初等方法来求该级数通项表达式较困难. 请用矩阵方法求 Fibonacci 级数通项的显式表达式.

10. (10 分) 设 σ 是数域 F 上有限维向量空间 V 的一个线性变换, σ 的值域的维数 $\dim(\sigma V) = 1$. 证明

- (i) 存在唯一的数 $c \in F$, 使得 $\sigma^2 = c\sigma$;
- (ii) 如果 $c \neq 1$, 则 $I - \sigma$ 为可逆的线性变换, 这里 I 是恒等变换.

11. (10 分) 设 p_1, p_2, \dots, p_n 为两两不等的素数. 证明多项式

$$f(x) = (x - p_1)^2 (x - p_2)^2 \cdots (x - p_n)^2 + 1$$

在有理数域上不可约.