深圳大学 2012 年硕士研究生入学考试初试试题

（答题必须写在答题纸上，写在本试题纸上无效）

考试科目代码：712 考试科目名称：数学分析

专业：基础数学，应用数学，计算数学，统计学

一、填空题(每空 1 分，共 8 小题 10 个空，10 分)

1.集合 $S=\left\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,3,\ldots\right\}$ 的聚点集是_____，上、下确界分别是________.

2.若函数 f 是连续奇函数，a 是正实数，则定积分 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=$________.

3.若函数 f 是可导的单调增函数，则 $f'(x)$_____ 0.

4.有界闭区间上函数的可导性、可积性、有界性、连续性中，最弱的性质是________，最强的性质是__________.

5.若函数 f 是具有二阶连续导函数的凸函数，且在点 a 满足 $f'(a)=0$，则函数 f 在点 a 取得_____ 值.

6.定积分 $\int_0^{\pi/2}\sin x^2 dx$ 与 $\int_0^{\pi/2}\sin x^3 dx$ 的大小关系是____________________.

7.若收敛数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $a_n > b_n, n=1,2,3,\ldots$，则其极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 的大小关系是____________________.

8.若无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=$______.

二、判断题(每小题 2 分，共 5 小题，10 分)

判断以下命题是否正确.

1. 若数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 中一个收敛，另一个发散，则数列 $\{a_n b_n\}$ 发散.

2.任何奇数次实系数多项式必有实数根.

3.在 R 上连续的周期函数必为有界函数.

4.若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

5.若二元函数 $f(x,y)$ 在点（0,0）处的两个偏导数 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 都存在，则函数 $f(x,y)$ 在点（0,0）必可微.

三、计算题(每小题 10 分，共 4 个小题，40 分)

1.求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x+5x^2)}{\ln(e^x+x-x^2)}$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(x^{2011}+y^{2011}\right)e^{-(x+y)}$

2.根据条件和要求计算：

（1）设函数 $f(x)$ 在点 a 的邻域内连续可导，$f(a)\neq 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right)^n$.

（2）求函数 $u=xyz$ 的全微分以及在点 A（1,1,2）处沿到点 B（4,5,14）的方向 $\overrightarrow{AB}$ 上的方向导数.

3.求函数 $f(x)=|x|\,(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶展开式，并据此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

4.设区域 $D\subset R^2$ 关于直线 $y=x$ 对称，面积为 2； 函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续正函数，$a-b=2011$，求

$$\int_{\partial D}\left(\int_0^y\frac{bf(t)}{f(x)+f(t)}dt\right)dx+\left(\int_0^x\frac{af(t)}{f(y)+f(t)}dt\right)dy$$

其中 ∂D 为区域 D 的边界，取逆时针方向.

四、应用题（每小题 10 分，共 3 个小题，30 分）

1.由点 $P(2,0)$ 向圆 $x^2+y^2=1$ 作两条切线 PM 和 PN，求圆周外部与该二切线所围区域的面积.

2.将长度为 C 的铁丝截为长度分别为 x,y,z 的三段，围成周长分别为 x,y,z，长宽之比分别为 $1:1, 2:1, 3:1$ 的三个矩形.问当 $x:y:z$ 为多少时，三个图形面积之和最小？

3.求曲面 $z=xy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=1$ 内那部分的面积.

五、证明题（每小题 15 分，共 4 个小题，60 分）

1.设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续可导且导函数 $f'(x)$ 有界，函数 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[f(x)-g(x)\right]=2011$.证明函数 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

2.设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导.求证：存在 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=(a+b)\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}=(a^2+ab+b^2)\frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}$$

3. 设 $g(x)$ 在实数集 R 上二阶连续可微，$g(0)+g'(0)=0$. 求证：若函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

在 R 连续，则 f 在 R 可导且导函数 $f'(x)$ 在 R 上连续.

4.设函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续可导且 $g(x)$ 是有界函数，$f'(x)\le 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.证明无穷积分

$$\int_0^{+\infty} f(x)g'(x)dx$$

收敛.