深圳大学2013年硕士研究生入学考试初试试题

（答题必须写在答题纸上，写在本试题纸上无效）

考试科目代码：915 考试科目名称：高等代数

专业：数学、统计

（本卷共9题）

1.（20分）设数域 F 上矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$，行列式 $|A|=-1$．又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,\ -1,\ 1)^T$，求 a，b，c 及 λ_0 的值.

2.（15分）计算数域 F 上 $n+1$ 阶行列式的值：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ a_3^n & a_3^{n-1}b_3 & a_3^{n-2}b_3^2 & \cdots & a_3b_3^{n-1} & b_3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

其中 $a_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n+1$.

3.（15分）对下列方程组：

$$\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}-x_n=a_{n-1} \\ x_n-x_1=a_n \end{cases}$$

（1）给出有解的充分必要条件并予以证明；

（2）在有解时给出一般解.

4.（15 分）设 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ 是一组线性无关的向量，若向量组 $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_k$ 可由 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ 线性表出如下：

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m, \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_k = a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \cdots + a_{km}\alpha_m. \end{cases}$$

记表出矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{k\times m}$. 求证：向量组 β_1, β_2, $\cdots$, β_k 的秩等于 A 的秩 $r(A)$.

5.（20 分）设 V 是由次数小于 n 的实系数多项式组成的线性空间，D 是 V 上的求导（微积分中的求导数）变换. 求证：向量 1 包含在 D 的任意一个非零不变子空间内. 进一步证明：D 的任意 k $(0<k\le n)$ 维不变子空间必是由 $\{1, x, \cdots, x^{k-1}\}$ 生成的子空间.

6.（20 分）设数域 F 上多项式 $f(x)=x^m-1$ 和 $g(x)=x^n-1$，求证：$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $(f(x), g(x))=x^d-1$，其中 d 是 m 与 n 的最大公因子.

7.（15 分）设复数域上 n 维向量空间 V 上的两个线性变换 σ 和 τ 满足 $\sigma\tau=\tau\sigma$. 证明 σ 和 τ 有公共的特征向量.

8.（15 分）设 σ 是数域 F 上有限维向量空间 V 的一个线性变换，σ 的值域的维数 $\dim\sigma(V)=1$. 证明

（1） 存在唯一的数 $c\in F$，使得 $\sigma^2=c\sigma$；

（2） 如果 $c\neq 1$，则 $\iota-\sigma$ 为可逆的线性变换，这里 ι 是恒等变换.

9.（15 分）设 A 是数域 F 上 n 阶方阵，其秩 $r(A)=r$，求证：$A^2=A$ 的充要条件是存在秩等于 r 的 $n\times r$ 矩阵 S 和秩等于 r 的 $r\times n$ 矩阵 T，使 $A=ST$，$TS=I_r$，其中，I_r 是 r 阶单位矩阵.