

# 湛江海洋大学 2003 年攻读硕士学位研究生入学考试 《高等数学》(312) 试卷

(请将答案写在答题纸上, 写在试卷上不给分, 满分 150 分)

一、填空题 (每小题 4 分, 满分 24 分)

1、设  $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ x+k & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

2、已知  $f'(3) = 2$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3) - f(3-h)}{3h} =$  \_\_\_\_\_.

3、 $\int_{-2}^2 \frac{x+|x|}{2+x^2} dx =$  \_\_\_\_\_.

4、设  $u = e^{\frac{x}{y}}$ , 则  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$  \_\_\_\_\_.

5、
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} =$$
 \_\_\_\_\_.

6、设方阵  $A$  满足  $A^3 - A^2 + 2A - E = 0$ , (其中  $E$  为单位矩阵), 则  $A^{-1} =$  \_\_\_\_\_.

二、选择题 (每小题 4 分, 满分 24 分)

1、设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ , 讨论函数  $f(x)$  的间断点, 其结论为 ( ).

(A) 不存在间断点      (B) 存在间断点  $x=1$

(C) 存在间断点  $x=0$       (D) 存在间断点  $x=-1$

2、对函数  $y = x^3 + 8$  在区间  $[0, 1]$  上应用拉格朗日中值定理时, 所得的点

$\xi =$  ( ).

- (A)  $\frac{1}{2}$                       (B)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$   
(C)  $\frac{1}{3}$                       (D)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3、设  $f(x, y)$  是连续函数, 则  $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = ( \quad )$ .

- (A)  $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx$       (B)  $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$   
(C)  $\int_0^1 dy \int_1^y f(x, y) dx$       (D)  $\int_0^x dy \int_1^y f(x, y) dx$

4、在下列等式中, 正确的结果是 ( ) .

- (A)  $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$       (B)  $\int f'(x) dx = f(x)$   
(C)  $d \int f(x) dx = f(x)$       (D)  $\int df(x) = f(x)$

5、已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 则向量组 ( ) .

- (A)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$  线性无关  
(B)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$  线性无关  
(C)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$  线性无关  
(D)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$  线性无关

6、设  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan x - \sin x$  是与  $x^n$  同阶的无穷小, 则  $n$  为 ( ) .

- (A) 1                      (B) 2  
(C) 3                      (D) 4

三、计算题 (每小题10分, 满分80分)

- 1、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^x$                       2、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt}{x^2}$

3、 $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

4、 $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$

5、已知  $y = x^3 + e^x + x^x + \ln 2$ , 求  $\frac{dy}{dx}$

6、设  $\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = f(e^{3t} - 1) \end{cases}$ , 其中  $f(t)$  可导, 且  $f'(0) \neq 0$ , 求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$

7、计算  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $D$  为曲线  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $y = x$  及  $y = 1$  所围成的区域.

8、问  $\lambda$  为何值时, 线性方程组  $\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$  有解, 并求出解的一般形式.

四、应用题 (满分12分)

试求曲线  $y = \ln x$ ,  $x \in [2, 4]$  上一条切线, 使该切线与直线  $x = 2$  和直线  $x = 4$  及曲线  $y = \ln x$  所围成的图形的面积最小.

五、证明题 (满分10分)

设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上可导, 对于  $[0, 1]$  上的每一个  $x$ , 函数  $f(x)$  的值都在开区间  $(0, 1)$  内, 且  $f'(x) \neq 1$ , 证明在  $(0, 1)$  区间内有且仅有一个  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ .