

湛江海洋大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试
《高等数学》(312) 试卷

(请将答案写在答题纸上,写在试卷上不给分.本科目满分 150 分)

一. 填空题 (每小题 4 分, 满分 24 分)

1. $\lim_{x \rightarrow +0} x^x =$ _____.

2. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $xy + 2 \ln x = y^4$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在点(1,1)处的切线方程是_____.

3. $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx =$ _____.

4. 若 $z = \ln(x^2 + y^2)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

5. 已知 α 为三维列向量, α^T 是 α 的转置. 若 $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$\alpha^T \alpha =$ _____.

6. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩为_____.

二. 选择题 (每小题 4 分, 满分 24 分)

1. 设 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 则方程 $f'(x) = 0$ 有_____个实根.

(A) 1;

(B) 2;

(C) 3;

(D) 4.

2. 设 $f(x) = e^{-x}$, 则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx =$ _____.

(A) $\frac{1}{x} + C$;

(B) $\ln x + C$;

$$(C) -\frac{1}{x} + C; \quad (D) -\ln x + C.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin x \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(A) 0; \quad (B) 1;$$

$$(C) 2; \quad (D) -1.$$

$$4. \text{已知 } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}, \text{ 则必有 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(A) f'_+(0) = 1; \quad (B) f'_+(0) = -1;$$

$$(C) f'_-(0) = 0; \quad (D) f'_-(0) = -1.$$

$$5. \text{已知非齐次线性方程组 } \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases} \text{ 有无穷多个解, 则 } \lambda = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(A) -2; \quad (B) -1;$$

$$(C) 0; \quad (D) 1.$$

6. 设 A、B 是三阶方阵, E 是三阶单位矩阵, $|A| = 2$, 且 $A^2 + AB + 2E = 0$, 则

$$|A + B| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(A) 0; \quad (B) -1;$$

$$(C) -4; \quad (D) -2.$$

三. 计算题 (每小题 10 分, 满分 80 分)

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos t dx}{x \sin x}$$

$$3. \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$4. \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$$

5. 求方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 的一阶及二阶导数.

6. $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的区域.

7. 设 $z = \arcsin(x-y)$, 而 $x = 3t, y = e^{2t}$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

8. 设 $AB + E = A^2 + B$, 其中 E 是三阶单位矩阵, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵

B .

四. 证明题 (满分10分)

设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(0) = 4,$

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^2.$

五. 应用题 (满分12分)

要造一圆柱形油罐, 体积为 V , 问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?