华南师范大学

2000 年招收研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

适用专业：基础数学，应用数学 运筹学与控制论

一、(15 分) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a+n & a+(n-1) & \cdots & a+2 & a+1 \\ a+1 & a+n & \cdots & a+3 & a+2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-2) & a+(n-3) & \cdots & a+n & a+(n-1) \\ a+(n-1) & a+(n-2) & \cdots & a+1 & a+n \end{vmatrix}$$

二、(20 分) (1) 设 $f(x)$, $g(x)$ 是两个不同时为 0 的实系数多项式. 证明：对于任意正整数 n， $(f(x),g(x))^n=(f^n(x),g^n(x))$.

(2) 设 a 是一个实数. 证明：多项式 $f(x)=x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+\cdots+a^{n-1}x+a^n$ 最多只有一个实根 (不计重数).

三、(15 分) 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=E$ (E 是 n 阶单位矩阵). 证明：

(1) A 相似于形为

$$\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & -E_{n-s} \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中 E_s 表示 s 阶单位矩阵；

(2) 对于任何正整数 m,k, 都有 秩$(A+E)^m$ + 秩$(A-E)^k=n$.

四、(15 分) 设 $f(x)$, $g(x)$ 为数域 F 上的多项式, 且有 $(f(x),g(x))=1$. A 是 F 上的 方阵. 设 $f(A)g(A)X=0$, $f(A)X=0$, $g(A)X=0$ 的解空间分别是 W, V_1 和 V_2. 证明： $W=V_1\oplus V_2$.

五、(20 分) 设实数域 R 上的全体 2 阶方阵构成的欧氏空间为 $\mathbb{R}^{2\times 2}$. 取固定的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, 在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上定义变换,

$$\sigma: X \longmapsto AX - XA, \qquad \forall X \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(1) 证明 σ 是线性变换;

(2) 求出 σ 关于 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的标准正交基 E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} 下的矩阵;

(3) 证明存在一个 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的标准正交基, σ 在此基下矩阵为对角阵; 并求出其最小多项式.

六、(15 分) 设实二次型

$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3.$$

(1) 求此二次型的正惯性指标和符号差;

(2) 问方程 $q(x_1,x_2,x_3) - 2x_3 - 2 = 0$ 对应空间 $\mathbb{R}^3$ 中的什么曲面.