華南師範大學

2000年招收研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

适用专业：基础数学，应用数学，运筹学与控制论

题号	分数	阅卷人
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
总分		

考生须知：

1、答案应写在本试题纸上，写在其它纸上无效。
2、字迹要清楚，保持卷面清洁。
3、草稿纸另发，考试结束后统一收回。

一. 填空题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设 $a_n = (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$, $n = 1, 2, \cdots$, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n =$ ____,
$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n =$ ____;

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数} \\ -x, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ $x \in R$, 则 $f(x)$ 在 $x =$ ____ 处连续;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx =$ ____;

4. $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} =$ ____;

5. 方程 $x^3 - 3x + c = 0$ (c 为实常数) 在区间 $[0, 1]$ 中至多有 ____ 个根;

6. 设 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ ($n > 1$, n 自然数), 写出 I_{n+1} 的递推公式

$I_{n+1} =$ ____________________;

7. 设 $u(x, y) = \int_0^{\sin x + \cos y} f(t) dt$, $f(t)$ 是可微函数, 则

$du =$ ____________________;

8. 设 $f(x, y)$ 在 $P_0(2, 0)$ 处可微, 且在 P_0 处指向 $P_1(2, 2)$ 的方向导数是 1, 指向原点的方向导数是 -3, 则在 P_0 处指向 $P_2(1, 2)$ 的方向导数是 ____;

9. 写出函数在 $x = 0$ 处的幂级数展开式:

$\sin^2 x =$ ____________________;

10. 曲线 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$ 的弧长 $s =$ ____.

试题编号: 419

二、 (12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在、证明：$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可取得最大值或最小值。

三、 (12 分) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$$

所确定，其中 f 是可微函数，试证

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

四、 (12 分) 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n}\right]$$

五、 (12 分) 已知 a,b 为实数，且 $1<a<b$，证明不等式：

$$(a+1)^{\ln b}>(b+1)^{\ln a}$$

六、 (12 分) 计算曲面积分：

$$I=\iint_S x\,dy\,dz+y^2dz\,dx+z^3dx\,dy,$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧。

七、 (10 分) 设 $u_n(x)\geq 0$，在 $[a,b]$ 上连续，$n=1,2,\cdots$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛于连续函数 $f(x)$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。