

华南师范大学

2003 年招收研究生入学考试试题

考试科目: 复变函数

适用专业: 基础数学、应用数学、运筹学与控制论

复变函数试题

一, 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 证明 $\overline{if(z)}$ 在区域 D 内也解析. (15 分)

二, 设 $C = \{|z| = 2\}$, 求积分: (18 分)

$$(1) \int_C \frac{2z^2 - z + 1}{z - 1} dz; \quad (2) \int_C \frac{2z^2 - z + 1}{(z - 1)^2} dz.$$

三, 验证 $h(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ ($x > 0$) 是右半 z 平面内的调和函数. 分别由下列条件求解析函数 $f(z) = u + iv$. (18 分)

$$(1) v = h(x, y), \quad f(1) = 1; \quad (2) u = h(x, y).$$

四, 证明最小模原理: 设 $f(z)$ 是区域 D 内不恒为常数的解析函数. 若 $z_0 \in D$ 满足 $f(z_0) \neq 0$, 则 $|f(z_0)|$ 不可能是模函数 $|f(z)|$ 在 D 内的最小值. (15 分)

五, 将函数 $\frac{z-1}{z(z+2)^2}$ 在下列指定区域内展为罗朗级数: (18 分)

$$(1) 0 < |z| < 2; \quad (2) 2 < |z + 2i| < 4.$$

六, 求下列函数 $f(z)$ 在其孤立奇点 (包含无穷远点) 处的残数: (18 分)

$$(1) \frac{1}{\sin z};$$

$$(2) \frac{1}{(z - \alpha)^m(z - \beta)}.$$

七, 证明方程

$$e^z - e^{\lambda} z^n = 0$$

在单位圆 $\{|z| < 1\}$ 内有 n 个根. (15 分)

八, z 平面上有三个互相外切的圆周, 切点之一在原点. 函数 $w = \frac{1}{z}$ 将这三个圆周所围成的区域变成 w 平面上什么区域. (15 分)

九, 求出将第一象限变到上半平面的保形变换, 且使 $z = i\sqrt{2}, 0, 1$ 对应地变成 $w = 0, \infty, -1$. (18 分)