華南師範大學

2003 年招收研究生入学考试试题

考试科目：数学分析与高等代数

适用专业：基础数学，应用数学，运筹控制，课程与教学论

数学分析 6 题，高等代数 5 题，各占 75 分，共 150 分。

一．（12 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

二．（12 分）设 $D=\{(x,y):-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$。求积分

$$\iint_D |y-x^2|dxdy$$

三．（12 分）证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^3x^3}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛（其中，$0<a<b<+\infty$）；在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛；并证明：函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^3x^3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

四．（12 分）求第二型曲线积分 $\oint_L -\frac{2}{3}y^3dx+\frac{1}{3}x^3dy$，其中，$L$：$x^2+2y^2=1$，取逆时针方向。

五．（12 分）$f(x)$ 是 $(a,+\infty)$ 上的连续函数。求证：如果 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在（有限），那么，$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上一致连续。问：逆命题是否成立？如成立，请证明之；否则，请举反例。

六．（15 分）设 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛，而且，对于每个固定的 $y\in[c,d]$，$f(x,y)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少。求证：当 $x\to+\infty$ 时，函数 $xf(x,y)$ 和 $f(x,y)$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致地收敛于 0。

七 .(10 分) 证明行列式等式

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = |A| + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

其中 $|A| = |a_{ij}|$, A_{ij} 是 a_{ij} 在 $|a_{ij}|$ 中的代数余子式。

八. (15 分) 设 $f(x), g(x)$ 是数域 F 上的多项式， m 是一正整数。证明： $f^m(x)|g^m(x) \Leftrightarrow f(x)|g(x)$.

九.(15 分) (1) 设 A 是 $m\times s$ 矩阵， B 是 $s\times n$ 矩阵， $X = (x_1, x_2, ..., x_n)'$. 证明：线性方程组 $BX=0$ 与 $ABX=0$ 同解的充分必要条件是秩 $(AB)=$ 秩 A.

(2) 设 A 是 $m\times s$ 实数矩阵，证明：秩 $(A'A)=$ 秩 $(AA')=$ 秩 A.

十 .(20 分) 设 $\mathbf{R}$ 是实数域， $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 为所有 2 阶实方阵构成的线性空间。对于固定的实数 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, 定义 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 上线性变换 $\mathbf{T}$,

$$\mathbf{T}: \mathbf{X} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

(1) 求 $\mathbf{T}$ 在基 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵。

(2) 若 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 将线性变换 $\mathbf{T}$ 对角化并给出变换的矩阵。

十一.(15 分) 设实对称矩阵 A 的特征值全大于 a, 与 A 同阶的实对称矩阵 B 的特征值全大于 b.

证明： (1) $A-aE$ 和 $B-bE$ 都是正定矩阵;

(2) $A+B$ 特征值全大于 $a+b$.