暨南大學
JINAN UNIVERSITY

2010 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题（副卷）

****

学科、专业名称：数学学科、基础数学　应用数学　概率论与数理统计等专业

研究方向：各专业研究方向

考试科目名称：810 高等代数

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

一　填空题（共 9 小题 44 分，每空 4 分）

1　n 级行列式 $\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & x \\ a & a & \cdots & x & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & x & \cdots & a & a \\ x & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$ 等于__________。

2　设 A 是一个 n 级方阵，E 是 n 级单位矩阵，且 $A^2+A-4E=0$，则 $(A-E)^{-1}=$______。

3　设 V 是 $P^{n\times n}$ 中全体对称矩阵作成的数域 P 上的一个线性空间，则 V 的维数为________，一组基为____________。

4　给出 P^3 的两组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 和 η_1,η_2,η_3：$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$，$\eta_1=(1,1,1),\eta_2=(1,1,0),\eta_3=(1,0,0)$。则基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵为_____。若线性变换 σ 在基　　　下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，则 σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为_______。

5　设 V 是数域 P 上的一个 3 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V 的一组基，若 V 上的一个线性函数 σ 满足 $\sigma(\alpha_1+\alpha_3)=1,\sigma(\alpha_2-2\alpha_3)=-1,\sigma(\alpha_1+\alpha_2)=-3$，则 $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3)=$_______。（$k_1,k_2,k_3\in P$）

6　已知方阵 A 的初等因子组为 $\lambda,\lambda^2,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^3$，则 A 的 Jordan 标准形是________。

7　“代数基本定理”的内容是________________。

8　设 A，B 都是 n 级正定矩阵，则 $A^{-1},A+B,AB,A-B$ 中为正定矩阵的是________。

9　正交矩阵的实特征值为________。

二（15 分）设 $p(x)$ 是数域 P 上的一个不可约多项式，若 $p(x)\mid(f(x)+g(x))$，且 $p(x)\mid f(x)\,g(x)$，则 $p(x)\mid f(x)$ 且 $p(x)\mid g(x)$。其中 $f(x)$，$g(x)$ 是数域 P 上的多项式。

三（15 分）线性方程组 $\begin{cases}\lambda x+9y+3z=2\\ -x+(\lambda-1)y=\lambda\\ 3x-y+z=-4\end{cases}$ 当 λ 为何值时方程组有：

1　唯一解，并求其解；
2　无穷多解，给出解的表达式；
3　无解。

四（15 分）设 $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$

1　求 A 的全部特征值；

2　对 A 的每个特征值 λ，求 A 的属于特征值 λ 的特征子空间的维数和一组基；

3　求正交矩阵 T，使 $T'AT$ 是对角矩阵，并给出此对角矩阵。

五（15 分）设 V 是数域 P 上的一个 n 维线性空间 $(n\geq 1)$，若有线性变换 σ 与向量 ξ 使得 $\sigma^{n-1}\xi\neq 0$，但 $\sigma^{n}\xi=0$。

1　证明 $\xi,\sigma\xi,\cdots,\sigma^{n-1}\xi$ 线性无关；

2　证明 σ 在某基下的矩阵是 $A=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}$

六（15 分）1　设 $A\in R^{m\times n}$，证明秩 $(A'A)$=秩 (A)=秩 (AA')。

2　设 A 是实对称矩阵，$A^2=0$，证明 $A=0$。

七（15 分）已知矩阵 A 是数域 P 上的一个 n 级方阵，如果存在 P 上的一个 n 级可逆方阵 X，使得 $X^{-1}AX$ 为对角矩阵，那么称 A 在 P 上可对角化。分别判断 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-2&3&-1\end{pmatrix}$ 能否在实数域上和复数域上可对角化，并给出理由。

八（16 分）用 $R[x]_4$ 表示实数域 R 上次数小于 4 的一元多项式组成的集合，它是一个欧几里得空间，内积为 $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$。设 W 是由零次多项式及零多项式组成的子空间，求 $W^{\perp}$ 以及它上的一个基。