暨南大學 JINAN UNIVERSITY

2011 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题（副卷）

****

学科、专业名称：数学学科、基础数学专业、概率论与数理统计专业、应用数学专业

研究方向：各方向

考试科目名称：709 数学分析

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

1. 求极限（每小题 8 分，共 24 分）

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1>1$，$a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{1+a_n}$，$n=1,2,\Lambda$．证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(2) 设 $x_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\Lambda\,(2n-1)}$，$n=1,2,\Lambda$．求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2}{4(1-\cos x)^2+(e^x-1)x^3}$.

2. 设函数 g 在 x_0 的某邻域内 $n-1$ $(n=2,3,\Lambda)$ 阶光滑，$f(x)=(x-x_0)^n g(x)$，求 $f^{(n)}(x_0)$．(8 分)

3. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是数项级数，证明：(13 分)

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=\lambda<0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是收敛的正项级数，且数列 $\{u_n\}$ 单调，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

4. 证明方程 $2y-1+\cos y-xe^y=0$ 在 $(0,0)$ 的邻域内确定唯一的可导函数 $y=y(x)$，并求 $y'(0)$, $y''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)}{x}$．(12 分)

5. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{(2n-1)!}x^{2n}$ 的收敛范围及和函数．(10 分)

6. 将 $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}-x\arctan x$ 在 $x=0$ 处展开成幂级数，并求数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ 的值. (10 分)

7. 计算积分 (每小题 10 分，共 40 分)

(1) 求 $\int\frac{dx}{(x-1)^{5/2}\sqrt{x^3+1}}$.

(2) 判断广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{2-x^2}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx$ 的敛散性， 若收敛，求其值.

(3) 计算 $\oint_l\frac{\cos x^2-x^2y}{x^2+4y^2}dx+\frac{4x^2y-e^{y^2}}{x^2+4y^2}dy$，其中 l 为取逆时针方向的曲线：

$x^2+4y^2=1$.

(4) 计算 $\iint_S yzdydz+(x^2+z^2)ydzdx+xydxdy$，其中 S 为曲面 $4-y=x^2+z^2$

上 $y\geq 0$ 的那部分，取正侧.

8. 证明: (共 21 分)

(1) 若函数 f 在 $(x_0,+\infty)$ 内可导， 且 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=A$ (A 为常数)， 则

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$. (11 分)

(2) 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上存在二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$,

$f''(x)\neq 0(x\in(a,b))$，则对 $\forall x\in(a,b)$，$f(x)\neq 0$. (10 分)

9. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\tan\frac{|x|^{\lambda}+|y|^{\delta}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

其中 $\lambda,\delta>0$. 问对哪些 λ,δ，f 在 $(0,0)$ 可微？ (12 分)