



2011 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业名称：凝聚态物理、光学、生物物理学、环境科学（理学）、生物医学工程（理学）

研究方向：

考试科目名称：高等数学（正卷）

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

本试卷满分为 150 分，考试时间为 3 小时。

一、填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，共 36 分。把答案填在题中横线上）

1. 函数 $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ 的极大值为_____.

2. $\int_0^1 x^2 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy =$ _____.

3. 向量 $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (1, -2, 0)$, 则 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$ _____.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{2n^2} \right) =$ _____.

5. 设向量组 $(1, 3, 6, 2)$, $(2, 1, 2, -1)$, $(1, -1, a, -2)$ 线性相关, 则 $a =$ _____.

6. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $2z + xy = \int_0^z e^{-t^2} dt$ 确定, 则 $dz =$ _____.

7. 椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面方程为_____.

8. 半圆 $L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$, 则 $\int_L (x^2 + y^2) ds =$ _____.

9. 微分方程 $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$, $y|_{x=0} = 1$ 的特解为_____.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解的充要条件是 () .

- A. A 的列向量组线性无关
- B. A 的列向量组线性相关
- C. A 的行向量组线性无关
- D. A 的行向量组线性相关

2. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ax_2 - 2x_3)^2 + (2x_3 + 3x_3)^2 + (x_1 + 3x_2 + ax_3)^2$ 是正定二次型的充要条件是 ().
- A. $a > 1$ B. $a < 1$ C. $a \neq 1$ D. $a = 1$.
3. 曲线 $y = \frac{x}{1-x^2}$ 的渐近线有 ().
- A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条
4. 以下函数有可去间断点的是 ().
- A. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ 3-x, & x > 0 \end{cases}$ B. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$
- C. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ D. $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$
5. 对于一般项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 若有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$, 则下面结果正确的是 ().
- A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛 B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散
- C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 有相同的敛散性 D. 无法判断.
6. 若无穷积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{p+1}} dx$ 收敛, 则必有 ().
- A. $p \geq 0$ B. $p > 0$ C. $p \leq 0$ D. $p < 0$.
7. 设 A 和 B 都是 n 阶可逆阵, O 为 n 阶零矩阵, 则 $\left| -2 \begin{bmatrix} A' & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \right| = ()$.
- A. $\frac{4^n |A|}{|B|}$ B. $\frac{(-2)^n |A|}{|B|}$ C. $4^n |A| |B|$ D. $(-2)^n |A| |B|$
8. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 不为等价无穷小的是 ().
- A. $\sin x^2$ 和 x^2 B. $\sqrt[3]{1+x} - 1$ 和 $\frac{x}{n}$
- C. $\ln(1+x)$ 和 x D. $1 - \cos x$ 和 x^2

三、计算题 (本题共 9 小题, 每小题 8 分, 共 72 分)

1. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x & L & x \\ x & 0 & x & L & x \\ x & x & 0 & L & x \\ M & M & M & O & M \\ x & x & 0 & L & 0 \end{vmatrix}$$

2. 已知实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, 求正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 的收敛半径和收敛区域.

4. 求

$$I = \iint_{\Sigma} 4xzdydz - 2yzdzdx + (1-z^2)dxdy$$

其中 Σ 是曲线 $z = e^y$ ($0 \leq y \leq a$) 绕 z 轴旋转生成的旋转面, 取下侧.

5. 设 $u = f(x+y, xy, \frac{x}{y})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

6. 求 $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$.

7. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

8. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+kx)}{x}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 试求 k 与 $f'(0)$.

9. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^x$ 的通解.

四、证明题 (10 分)

设 $f(0) = 0$, f' 在原点的某领域内连续, 且 $f'(0) \neq 0$. 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = 1.$$