439 • 1603

华 南 理 工 大 学

2001年攻读硕士学位研究生入学考试试题
（请在答题纸上作答，试后本卷与答题纸一同交回）

考试科目：数学分析
适用专业：应用数学

共 3 页

考生注意：
报考会计信息系统方向的做一、二、三、四、五、六、七、八题；
报考其它方向的做一、二、三、四、五、八、九、十题。

一．解答下列各题（每小题 5 分，共 30 分）

1． 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

2． 证明不等式： $2e^{-\frac{1}{4}}\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant 2e^2$.

3． 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n!)}$ 的敛散性.

4． 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{e^x}{1+e^x}, & x<0.\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

5． 展开 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ 为 x 的幂级数，求出它的收敛区间，并求

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$ 的和.

6． 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的偏导数，并讨论在点 $(0,0)$ 处偏导数的连续性及 $f(x,y)$ 的可微性.

二．（10分）设$f(x)$在(a,b)内可微，且$f'(x)$有界，证明$f(x)$在(a,b)内有界.

三．（10分）设方程$x=e^u\cos\theta$，$y=e^u\sin\theta$，定义u,θ都为x，y的函数

（1）求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$；$\frac{\partial \theta}{\partial x}$，$\frac{\partial \theta}{\partial y}$.

（2）证明$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}=0$.

四．（10分）计算

$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} xzdydz+yzdzdx+z\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$和$x^2+y^2+z^2=4a^2$，锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体表面的外侧.

五．（10分）计算$I=\oint_C\frac{(x+4y)dy+(x-y)dx}{x^2+4y^2}$，其中$C$为单位圆的正向，不过坐标原点.

六．（10分）设$f(x)=\int_{-1}^{x}t|t|dt\quad(x\geqslant -1)$，求曲线$y=f(x)$与$x$轴的交点并求$y=f(x)$与$x$轴所围成的封闭图形的面积.

七．（10分）证明$\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)^2$在$[0,1]$上一致收敛.

八．（10分）设$a_n>0\quad(n=1,2,\cdots)$，$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$，用定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty.$$

九．（10分）证明函数列$S_n(x)=n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\quad(n=1,2,\cdots)$在$[0,a]$上一致收敛$(a>0)$，在$[0,+\infty)$上不一致收敛.

十.（10 分）设 $\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$，证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.