本试卷满分 150 分.

1.（10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^x+2\cos x-2}{\tan x-\sin x}$.

2.（10 分）设 $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}$.

3.（10 分）设 $x_1>\sqrt{a}>1$，$x_{n+1}=\dfrac{a+x_n}{1+x_n}$，$n=1, 2, \cdots$,

试证：$\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$.

4.（10 分）设 C 为单位圆周，逆时针为正向，求

$$\oint_C \frac{(y+9x)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{9x^2+y^2}.$$

5.（10 分）求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+2)}{n(n+1)}x^n$ 的收敛区间，并求级数的和.

6.（10 分）设 S 为单位球面的上半部分，外侧为正向，计算

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

7.（15 分）令 $f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$，$\nu$ 是 (x,y) 平面上的任一单位向量.

（1）求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 沿 ν 的方向导数；

（2）试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性和可微性.

8.（15 分）设 $f(x)$ 连续，$y(x)=\int_0^x f(x-t)\sin t\,\mathrm{d}t$，试证：$y(x)$ 满足

$$y''+y=f(x),\quad y(0)=y'(0)=0.$$

9.（15 分）设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三次可微，$f(-1)=f(0)=f'(0)=0$，$f(1)=1$，试证：$\exists\ x\in(-1,1)$，使 $f^{(3)}(x)\ge 3$.

10.（15 分）试讨论无穷级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x}$ 在 $(0,\infty)$ 上的一致收敛性，以及 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上的有界性.

11．（15 分）设 $f(x)\ge 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$，$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}f(\frac{1}{\varepsilon})$. 试证明：对每个有界连续函数 $\varphi(x)$，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x=\varphi(0).$$

（12）—（13）任选一题做.

12.（15 分）证明：

$$\int_0^1\ln\frac{1+x}{1-x}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

13.（15 分）设 $f(t),\ g(t),\ h(t)$ 为 $[0,\infty)$ 上连续非负函数，满足

$g(t)\le f(t)+\int_0^t g(s)h(s)ds,\ \ t\ge 0$；$f'(t)\ge 0$；$\int_0^\infty h(t)dt=A<\infty$.

试证：$g(t)\le e^A f(t),\ \ t\ge 0$.