华南理工大学
2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（试卷上做答无效，请在答题纸上做答，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：高等代数

适用专业：计算数学　应用数学　运筹学与控制论

一、　证明：如果 $(f(x), g(x)) = 1$, 那么　(满分 15 分)

$$(f(x)g(x)(f(x)+g(x)),\ f(x)+f(x)g(x)+g(x)) = 1.$$

二、　问 λ 取何值时方程组有唯一解、无限多解、无解？并在有解时给出解的结构。

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ 2x_1 + (1+\lambda)x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda + \lambda^2 \end{cases}$$

(满分 20 分)

三、　判断下面的矩阵 A 是否可对角化：　(满分 10 分)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

四、证明：秩为 $r(r \geq 1)$ 的矩阵可表成 r 个秩为 1 的矩阵之和。

(满分 10 分)

五、　设 A 为 n 阶实对称矩阵，λ, μ 分别为其最大与最小特征根，证明对于任意的 $X \in \mathbf{R}^n$, $\lambda X'X \geq X'AX \geq \mu X'X$. 这里 X' 是 X 的转置矩阵。

(满分 10 分)

六、 设 A 为正交矩阵， A 的特征根均为实数，证明 A 为对称矩阵。

(满分 15 分)

七、 设 A, B 为实对称矩阵，证明 A, B 的特征根全部相同的充要条件是存在正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT = B$. (满分 15 分)

八、 设 $A_{s\times n}$ 是一实矩阵， A' 是 A 的转置矩阵．证明：

(i) 齐次线性方程组 $AX = 0$ 与 $A'AX = 0$ 同解；

(ii) 秩 $(A)=$ 秩 $(A'A)$;

(iii) 方程组 $A'AX = A'B$ (其中 B 是任一 s 维列向量) 一定有解。

(满分 25 分)

九、 设 η 为欧氏空间 $\mathbf{V}$ 中的一个单位向量，定义

$$\sigma(\alpha) = \alpha - 2 < \eta, \alpha > \eta,$$

其中 $< \eta, \alpha >$ 表示 η 与 α 的内积，证明： (满分 20 分)

(i) σ 是正交变换．这样的正交变换称为镜面反射；

(ii) 对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbf{V}$, 若 α, β 均为单位向量，则存在镜面反射 σ，使 $\sigma(\alpha) = \beta$，并求这个镜面反射的特征值及所对应的特征子空间.

十、设 A 是一个 n 阶矩阵．证明 A 与 A' 相似. (满分 10 分)