（本试卷共五大题，每题 30 分）

一、对于一维自由粒子，

（1） 设波函数为$\psi_p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}$，用哈密顿算符对其运算，证明动量本征态$\psi_p(x)$也是能量本征态，并写出其能量本征值；

（2） 设$t=0$时刻$\psi(x,0)=\psi_p(x)$，求$\psi(x,t)$；

（3）波函数$\psi(x)=\delta(x)$是否该自由粒子的能量本征态?为什么？

二、设粒子限制在立方形匣子中运动，即

$$V(x,y,z)=\begin{cases}0, & 0<x<a,\ 0<y<b,\ 0<z<c\\ \infty, & \text{其余区域}\end{cases}$$

求能量本征值和本征函数。如果$a=b=c$，讨论能级的简并度.

三、（1）利用轨道角动量分量$\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$, $\hat{l}_z$的对易关系证明：在$\hat{l}_z$的本征态下$\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$的期望值为零，即$\langle\hat{l}_x\rangle=\langle\hat{l}_y\rangle=0$；

(2)利用升算符和降算符$l_\pm=l_x\pm il_y$，求$\hat{l}_x^2$和$\hat{l}_y^2$在角动量算符$\hat{l}^2$和$\hat{l}_z$的共同本征态$Y_{lm}(\theta,\varphi)$状态下的期望值.

四、氢原子的哈密顿量具有球对称性，它在球坐标系统中写作

$$\hat{H}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

（1）确定它的归一化基态波函数；

（2）当原子处于基态时，求核外电子的坐标和动量分量的不确定度 Δx和Δp_x，并由此验证它们的测不准关系.

五、以$\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ 和$\hat{\sigma}_z$表记著名的泡利矩阵，它们在σ_z表象中可以明确地写作

$$\hat{\sigma}_x=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\hat{\sigma}_y=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},\hat{\sigma}_z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

（1）求$\hat{\sigma}_x$在σ_z表象中的本征态矢量；

（2）求σ_z表象到σ_x表象的变换矩阵S；

（3）论证：在σ_z表象中$S\hat{\sigma}_x S^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.