

一、（10分）试求解微分方程： $x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$

二、（15分）证明：若 Riccati 方程： $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ ，有一个特解 $y_1(x)$ ，那么借助于变量代换 $y = z + y_1(x)$ ，就可以求出方程的通解。

三、（20分）求二阶方程 $y'' - 2y' + 2y = te^t \cos t$ 的通解。

四、（20分）求解初值问题：

$$\begin{cases} y'(t) = -\sqrt{y(t)}, & t \in [0, +\infty) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

五、（10分）利用秦九韶算法计算多项式

$$p(x) = x^7 - 2x^6 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 1$$

在 $x = 2$ 处的值 $p(2)$ 。

六、（20分）已知方程

$$x^3 - x^2 - 0.8 = 0$$

在 $x = 1.5$ 附近有一个根，将此方程改写成如下两个等价形式：

$$x = \sqrt[3]{0.8 + x^2}, \quad x = \sqrt{x^3 - 0.8}$$

构造如下两个迭代格式：

$$(1) \quad x_{k+1} = \sqrt[3]{0.8 + x_k^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2) \quad x_{k+1} = \sqrt{x_k^3 - 0.8}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

试讨论上述两个迭代格式的收敛性，并对收敛的格式求所给方程的近似根 x^* （精确到 3 位有效数）。

七、（15 分）利用追赶法解如下方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = -3 \\ 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 & = -10 \\ 2x_3 + 5x_4 & = 2 \end{cases}$$

八、（20 分）对矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 2 & 10 \\ 4 & 8 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 11 & 20 \end{bmatrix}$ 作 LU 分解。

九、（20 分）用复化梯形公式计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

精确到 3 位有效数。