华南理工大学

2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（试卷上做答无效，请在答题纸上做答，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：高等代数（满分： 150 分）

适用专业：应用数学 计算数学 运筹学与控制论

一、 设 $f(x)$， $g(x)$ 是数域 F 上的多项式. （满分 15 分）

证明： $f(x) \mid g(x)$ 当且仅当对于任意的大于 1 自然数 n, $f^n(x) \mid g^n(x)$.

二、 设 A 是一个 n 阶实矩阵. 证明 $(E-A)(E+A)^{-1}$ 是正交矩阵，当且仅当 A 是反对称矩阵. （满分 16 分）

三、 求下面的矩阵 A 的列空间在 $\mathbf{R}^4$ 中的正交补的一个标准正交基：（满分 15 分）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

四、 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为数域 F 上的互不相同的数而 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 为数域 F 上的任意的数. 证明在 F 上存在唯一的 n 次多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i)=b_i, 0 \le i \le n$.

（满分 15 分）

五、 设 A 为 n 阶复矩阵. 证明 A 为对称矩阵的充分必要条件是存在 n 阶复矩阵 B，使得 $A=B'B$. 这里 B' 表示 B 的转置矩阵. （满分 14 分）

六、 设 A 为正定矩阵，则存在正定矩阵 S 使得 $A=S^2$. 由此证明每一个可逆实矩阵 B 都可以表示为一个正交矩阵与一个对称矩阵的乘积. （满分 10 分）

七、 设 V 是欧氏空间而 W 是 V 的有限维子空间. 证明 W 在 V 中一定有正交补. (满分 15 分)

八、 设 $V = M_n(F)$ 表示数域 F 上的 n 阶矩阵的向量空间. 对于 $A \in V$, 定义 $\sigma(A) = A'$. (A' 是 A 的转置矩阵。) (满分 20 分)

(i) 证明 σ 是一个线性变换;

(ii) 求 σ 的全部特征子空间;

(iii) 证明 σ 可以对角化。

九、 设 $f(x)$, $g(x)$ 是数域 F 上的互素的多项式 A 是 F 上的 n 阶矩阵。证明齐次线性方程组 $f(A)g(A)X = 0$ 的解空间是 $f(A)X = 0$ 的解空间与 $g(A)X = 0$ 的解空间的直和。(其中 X 表示 n 维列向量。) (满分 14 分)

十、 设 $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. (1) 将 $f(x)$ 在实数域上分解因式; (2) 证明 $f(x)$ 在有理数域上不可约. 由此证明 $cos(2\pi/5)$ 不是有理数. (满分 16 分)

华南理工大学

2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

(试卷上做答无效，请在答题纸上做答，试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称：高等代数 (满分： 150 分)

适用专业：应用数学 计算数学 运筹学与控制论

一、 设 $f(x)$， $g(x)$ 是数域 F 上的多项式. (满分 15 分)

证明： $f(x) \mid g(x)$ 当且仅当对于任意的大于 1 自然数 n, $f^n(x) \mid g^n(x)$.

二、 设 A 是一个 n 阶实矩阵. 证明 $(E-A)(E+A)^{-1}$ 是正交矩阵，当且仅当 A 是反对称矩阵. (满分 16 分)

三、 求下面的矩阵 A 的列空间在 $\mathbf{R}^4$ 中的正交补的一个标准正交基： (满分 15 分)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

四、 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为数域 F 上的互不相同的数而 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 为数域 F 上的任意的数. 证明在 F 上存在唯一的 n 次多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i, 0 \le i \le n$.

(满分 15 分)

五、 设 A 为 n 阶复矩阵. 证明 A 为对称矩阵的充分必要条件是存在 n 阶复矩阵 B ，使得 $A = B'B$. 这里 B' 表示 B 的转置矩阵. (满分 14 分)

六、 设 A 为正定矩阵，则存在正定矩阵 S 使得 $A = S^2$. 由此证明每一个可逆实矩阵 B 都可以表示为一个正交矩阵与一个对称矩阵的乘积. (满分 10 分)

七、 设 V 是欧氏空间而 W 是 V 的有限维子空间. 证明 W 在 V 中一定有正交补. (满分 15 分)

八、 设 $V = M_n(F)$ 表示数域 F 上的 n 阶矩阵的向量空间. 对于 $A \in V$, 定义 $\sigma(A) = A'$.（ A' 是 A 的转置矩阵。） (满分 20 分)

(i) 证明 σ 是一个线性变换;

(ii) 求 σ 的全部特征子空间;

(iii) 证明 σ 可以对角化。

九、 设 $f(x)$ ， $g(x)$ 是数域 F 上的互素的多项式 A 是 F 上的 n 阶矩阵。证明齐次线性方程组 $f(A)g(A)X = 0$ 的解空间是 $f(A)X = 0$ 的解空间与 $g(A)X = 0$ 的解空间的直和。（其中 X 表示 n 维列向量。） (满分 14 分)

十、 设 $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.（ 1 ）将 $f(x)$ 在实数域上分解因式; （ 2 ）证明 $f(x)$ 在有理数域上不可约. 由此证明 $cos(2\pi/5)$ 不是有理数. (满分 16 分)