

(试卷上作答无效, 请在答题纸上作答, 试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称: 数学分析

适用专业: 计算数学 应用数学 运筹学与控制论

一、(10 分) 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{3^n + 5^n + 7^n}}.$$

二、(10 分) 设  $A > 0$ ,  $x_1 > \sqrt{A}$ ,

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + A}{2x_n}, \quad (n \geq 1).$$

证明  $\{x_n\}$  收敛, 并求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .三、(10 分) 设  $\alpha > 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , 证明

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} \leq x^\alpha + (1-x)^\alpha \leq 1.$$

四、(10 分) 设  $S_1(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 定义

$$S_{n+1}(x) = \int_a^x S_n(t) dt, \quad (n \geq 1).$$

证明  $\{S_n(x)\}$  在区间  $[a, b]$  上一致收敛.五、(10 分) 设函数  $z = f(x, y)$  满足方程  $F(u, v) = 0$ , 其中  $a, b$  为常数  
 $u = x + az$ ,  $v = y + bz$ ,  $F$  可微且  $aF_u + bF_v \neq 0$ , 求积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{-(x^2+y^2)} \left( a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy.$$

六、(10 分) 求积分

$$\int_L (\sin x + y)^2 dx + (x^2 + y^2 \cos y) dy,$$

其中  $L$  是抛物线  $y = x^2$  上从点  $(-1, 1)$  到点  $(1, 1)$  上的一段.七、(15 分) 设  $a > 0$ , 确定  $x = e^{ax}$  的正实数根个数.八、(15 分) 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续,  $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  对任意  $A > 0$  均有意义, 求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(2x) - f(3x)}{x} dx.$$

九、(15 分) 求幂级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n^2 - 1}$$

的收敛域与和函数.

十、(15 分) 设  $f(x, y)$  在  $G = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$  上有定义, 若  $f(x, 0)$  在点  $x = 0$  处连续, 且  $f_y(x, y)$  在  $G$  上有界, 证明  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  点连续.

十一、(15 分) 证明

$$f(x) = xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

在  $[0, +\infty)$  上一致连续.十二、(15 分) 研究函数  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x}$  在区间  $[0, +\infty)$  上的连续性, 一致连续性, 可微性, 单调性.