625

华南理工大学
2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：数学分析

适用专业：基础数学，计算数学，概率论与数理统计，应用数学，运筹学与控制论

一、求解下列各题（每小题 10 分，共 60 分）

1、若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-a}{x_n+a}=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

2、设 $f(x)=\begin{cases}\cos(\pi x), & \text{当}x\text{为有理数}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}\end{cases}$，

证明 $f(x)$ 在点 $x_k=k+\dfrac{1}{2}$ (k 为任意整数)连续，而在其它点不连续。

3、若函数

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{f'(a)}\left[1+\frac{f(x)-f(a)}{[f'(a)]^2}\right]\left(f'(a)-\frac{1}{2}f''(a)\right),$$

求 $\varphi'(a)$ 及 $\varphi''(a)$。

4、证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛且一致收敛，但不绝对一致收敛。

5、设 n 为自然数，在区间 $(0,\pi)$ 上定义函数

$$D_n(x)=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

计算$\int_0^{\pi} D_n(x)dx$。

6、计算曲面$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$所围成的体积。

二、（15 分）计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{n^2}\right]。$$

三、（15 分）计算

$$I=\oint_C\frac{e^y}{x^2+y^2}\left[(x\sin x+y\cos x)dx+(y\sin x-x\cos x)dy\right],$$

其中$C: x^2+y^2=1$取逆时针方向。

四、（15 分）计算

$$\iint_S f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy,$$

其中f,g,h为连续函数, S 为平行六面体

$$0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c$$

的边界，指向外侧。

五、（15 分）讨论广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx\ (p>0)$$

的敛散性，对于收敛情况判别在何种情况是条件或绝对收敛。

六、（15 分）设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，且满足下列条件

$$\int_a^b x^k f(x)dx = 0 \quad (k = 0,1,2,\cdots,n)$$

用数学归纳法证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个不同的零点。

七、（15 分）设常数 A,B,C 满足 $AC - B^2 < 0$，且线性变换

$$\xi = x + \lambda_1 y,\ \eta = x + \lambda_2 y$$

把方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

变换为方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

证明 λ_1, λ_2 为方程 $C\lambda^2 + 2B\lambda + A = 0$ 的两个不同实根。