

华南理工大学
2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

(请在答题纸上做答, 试卷上做答无效, 试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称: 量子力学

适用专业: 凝聚态物理

共 2 页

本试题共 5 大题, 每题 30 分

1. 质量 m 的粒子在一维无限深势阱 $V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ \infty & (x < 0, x > a) \end{cases}$ 中运动,

(a) 求解能量本征值和本征函数.

(b) 若粒子所处状态的波函数 $\psi(x) = \frac{4}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi x}{a}$, 将此波函数用 (a)

求得的本征函数展开, 并求测量粒子能量时可能得到的值及相应的几率.

(c) 若 $t=0$ 时粒子处于 (b) 所描述的状态, 求其后任时刻的波函数 $\psi(x, t)$.

2. 厄米算符 A 的定义为 $(\psi, A\phi) = (A\psi, \phi)$.

(a) 证明: 厄米算符的本征值必为实数值.

(b) 证明: 厄米算符属于不同本征值的本征函数彼此正交.

(c) 以角动量 z 分量算符 $\hat{l}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ 为例, 验证以上两条定理.

3. 质量为 m 的粒子沿 x 方向穿越 $V(x) = \alpha \delta(x)$ 的势垒 ($\alpha > 0$),

(a) 对定态 Schrodinger 方程在 $x=0$ 的邻域积分, 导出波函数一阶导数的跃变条件.

(b) 求势垒以外 Schrodinger 方程的通解.

(c) 考虑粒子从左边入射, 利用 (a) 和 (b) 的结果求粒子穿越 δ 势垒时的透射系数 T 和反射系数 R , 并验证 $T+R=1$.

4. 质量为 μ ，电量为 q 的粒子处于一维谐振子势场 $V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ 中，若加上

弱电场 E ，则势能的变化为 $H' = -qEx$ 。

(a) 用微扰论求解能级的一级修正。

(b) 用微扰论求解能级的二级修正。

(c) 通过坐标变换 $x' = x - (qE / \mu\omega^2)$ 求出能级的精确解，并与微扰论结果相比较。

提示：谐振子本征函数 $\psi_n(\xi) = N_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$ ，其中 $\xi = \alpha x$ ， $\alpha = \sqrt{\mu\omega/\hbar}$ ，

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_m N_n H_m(\xi) H_n(\xi) \xi e^{-\xi^2/2} d\xi = \frac{\alpha}{2} \left(\sqrt{2(m+1)} \delta_{n,m+1} + \sqrt{2m} \delta_{n,m-1} \right)$$

5. 自旋为 $\frac{\hbar}{2}$ ，磁矩为 μ 的粒子处于磁场 \vec{B} 中，粒子的磁矩算符 $\vec{\mu} = \mu \vec{\sigma}$ ，其中

$\vec{\sigma}$ 为泡利算符。磁场对粒子作用的 Hamiltonian 为 $H = -\vec{B} \cdot \vec{\mu}$ 。当 $t=0$ 时，

磁场沿 z 方向，大小为 B_0 ，粒子处于 $\sigma_z = -1$ 的本征态。 $t>0$ 时，再加上

沿 x 方向较弱的磁场，大小为 B_1 。求 $t>0$ 时粒子的自旋态，以及 $\sigma_z = 1$ 的几率。