

华南理工大学  
2009 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

(请在答题纸上作答, 试卷上作答无效, 试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称: 数学分析

适用专业: 基础数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 应用数学, 运筹学与控制论

共 2 页

1. (10 分) 设函数  $f(x) = \varphi(a + bx) - \varphi(a - bx)$ , 其中  $\varphi(x)$  在  $x = a$  的某个小邻域内有定义且在该点处可导, 求  $f'(0)$ .

2. (10 分) 设  $0 < x < y < \pi$ , 证明

$$y \sin y + 2 \cos y + \pi y > x \sin x + 2 \cos x + \pi x.$$

3. (10 分) 设  $x > 0, y > 0$ , 求  $f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$  的极值.

4. (10 分) 设  $f(x) = \frac{\int_0^x du \int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt}{x(1 - \cos x)}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

5. (10 分) 计算  $\oint_c x dy - y dx$ , 其中  $c$  为椭圆  $(x + 2y)^2 + (3x + 2y)^2 = 1$ , 方向为逆时针方向.

6. (10 分) 计算  $\iint_S (x - y) dx dy + x(y - z) dy dz$ , 其中  $S$  为柱面

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ 及平面 } z = 0, z = 3 \text{ 所围成的空间区域 } \Omega \text{ 的}$$

整个边界曲面外侧.

7. (15 分) 设  $f(x) = \sin \sqrt{x}$ , 判断  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上是否一致连续, 并给出证明.

8. (15 分) 计算积分  $I = \iint_D \min\{x^2y, 2\} dx dy$ , 其中

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3\}.$$

9. (15 分) 计算积分  $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin 2xy dx$ .

10. (15 分) 设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$  讨论以下性质

i)  $f(x, y)$  的连续性,

ii)  $f_x, f_y$  的存在性及连续性,

iii)  $f(x, y)$  的可微性.

11. (15 分) 设  $x_0 = \sqrt{6}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 判断级

数  $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{3 - x_n}$  的敛散性.

12. (15 分) 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有连续的一阶导数, 证明

i) 若  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0$ , 则方程  $f(x) = 0$  在  $(-\infty, +\infty)$  内至少有一个实根.

ii) 若  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 则方程  $f'(x) = 0$  在  $(-\infty, +\infty)$  内至少有一个实根.