华南理工大学
2010年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：高等代数

适用专业：基础数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 应用数学, 运筹学与控制论

1. (15 分) 设 m, n 为自然数, 证明 $(x^m-1, x^n-1) = x^{(m,n)}-1$.

2. (15 分) 当 a, b 为何值时, 下列线性方程组无解？有唯一解？有无穷多解？当方程组有解时, 写出其全部解.

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x+(a+3)y-3z=3, \\ -2x+(a-1)y+bz=-1. \end{cases}$$

3. (20 分) 设 V 是 n 维线性空间 $(n \geq 3)$, X 和 Y 为 V 的两个空间, 并且维$(X)=n-1$, 维$(Y)=n-2$.

(1) 证明: 维$(X \cap Y)=n-2$ 或 $n-3$.

(2) 证明: 维$(X \cap Y)=n-2$ 当且仅当 Y 是 X 的子空间.

(3) 举例说明: 存在满足题设条件的线性空间 V 及其子空间 X 和 Y 使得维$(X \cap Y)=n-2$.

4. (15 分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 若 A 的前 $n-1$ 个顺序主子式均大于零, 而 $|A|=0$. 证明: n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=X'AX$ 是半正定的, 其中 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$.

5. (15 分) 设 $\mathcal{A}$ 是实数域 R 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\mathcal{A}^2=\mathcal{E}$ (恒等变换). 令 $V^+=\{x \in V \mid \mathcal{A}x=x\}$, $V^-=\{x \in V \mid \mathcal{A}x=-x\}$. 证明: $V=V^+ \oplus V^-$.

6. **(15 分)** 设 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为非零实 $1 \times n$ 矩阵, 求:

(1) 秩 $(A'A)$;

(2) $A'A$ 的特征值和特征向量.

7. **(15 分)** 设 α 为欧氏空间 V 的非零向量, 对 $\xi \in V$ 定义 $\mathcal{A}\xi = \xi - \frac{2(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$.

1) 证明: $\mathcal{A}$ 为 V 的正交变换.

2) 记 $W = L(\alpha)^{\perp}$, 则 W 是 $n-1$ 维子空间, 并且

$$\mathcal{A}\xi = \begin{cases} \xi, & \xi \in W, \\ -\xi, & \xi = \alpha. \end{cases}$$

3) 设 V 的维数是 4, 令 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4$ 为 V 的标准正交基, 并设 $\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon_1 -\frac{1}{2}\epsilon_2 -\frac{1}{2}\epsilon_3 +\frac{1}{2}\epsilon_4$, 求 $\mathcal{A}$ 在 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_4$ 下的矩阵.

8. **(20 分)** 在欧氏空间中有三组向量: α_1, α_2,$\cdots$, α_s; β_1, β_2,$\cdots$, β_s 和 γ_1, γ_2, $\cdots$, γ_s. 如果 α_1, α_2, $\cdots$, α_s 是线性无关的, β_1, β_2, $\cdots$, β_s 和 γ_1, γ_2, $\cdots$, γ_s 都是两两正交的单位向量, 并且对一切 $i, 1 \le i \le s$, 均有

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_i) = L(\beta_1, \cdots, \beta_i) = L(\gamma_1, \cdots, \gamma_i),$$

证明: 对每个 i, 有 $\beta_i = \pm\gamma_i$.

9. **(20 分)** 设 A, B 都是实对称矩阵, 证明: 当且仅当 $AB = BA$ 时, 有正交矩阵 Q, 使 $Q^{-1}AQ$ 与 $Q^{-1}BQ$ 同时为对角矩阵.