840

华南理工大学
2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：应用数学基础(含概率论、常微分方程)

适用专业：系统分析与集成

一、（20 分）求解如下微分方程

（1） $y^3 y'' = 1$；

（2） $ydx - (4x^2 y + x)dy = 0$；

（3）$(2x\sin y + 3x^2 y)dx + (x^3 + x^2\cos y + y^2)dy = 0$。

二、（17）考虑双参数函数族：

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

其中，C_1, C_2 为任意常数。求

（1）该函数族所满足的微分方程；

（2）相应的特征方程；

（3）极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y^2 + (y'_x)^2\right]$。

三、（18 分）考虑线性非齐次方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

（1）求该方程组的通解；

（2）求该方程组的有界解。

四、（20 分）求出方程

$$\ddot{x}+3\dot{x}+6x=\sin\omega t$$

的周期解，并求其振幅及振幅最大值。

五、（20 分）按要求计算下列各题的概率：

（1）将 3 个球随机放入 4 个杯子中，求杯子中球的最大个数分别为 1、2、3 的概率。

（2）已知 $P\left(\overline{A}\right)=0.3$，$P\left(B\right)=0.4$，$P\left(A\overline{B}\right)=0.5$，试求条件概率 $P\left(B\mid A\cup\overline{B}\right)$。

六、（15 分）设 K 在 $\left(0,5\right)$ 内服从均匀分布，求下列关于 x 的方程：

$$4x^2+4Kx+K+2=0$$

有实根的概率。

七、（20 分）若随机变量 ξ 服从几何分布：$P\left(\xi=k\right)=pq^k$，$\left(k=0,1,2,\cdots\right)$，其中：$0<p<1$，$q=1-p$。求 ξ 的特征函数 $f\left(t\right)$，数学期望 $E\left(\xi\right)$ 和方差 $D\left(\xi\right)$

八、（20 分）设 $\left\{\xi_n\right\}$ 为独立随机变量序列

（1）针对序列 $\left\{\xi_n\right\}$，叙述使中心极限定理成立的 Lindeberg 条件；

（2）若对每个 $k\geq1$，序列 ξ_k 服从区间 $\left(-\sqrt{k},\sqrt{k}\right)$ 上的均匀分布，证明：$\left\{\xi_n\right\}$ 满足中心极限定理。