华南理工大学

2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

(请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称：概率论

适用专业：概率论与数理统计

1, (10 分) 已知事件 A, B 满足 $P(A\cap B) = P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$, $P(A) = 0.3$. 试求 $P(B)$.

2, (15 分) 从 1,2,3,4 中任取一个数，再从不超过取出这个数的数字中任取一个数，求最后取出的数字是 2 的概率.

3, (15 分) 设 ξ 与 η 同分布且相互独立， ξ 的分布密度函数为

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

令 $A = \{\xi > a\}$, $B = \{\eta > a\}$, 且 $P(A\cup B) = \frac{3}{4}$. 试求常数 a.

4, (15 分) 设随机变量 ξ 的密度函数为

$$f_\xi(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

令 $\eta = e^\xi$, 试求 η 的分布密度函数.

5, (20 分) 设随机向量 (ξ, η) 的联合分布密度函数为

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 试求 ξ 的边缘分布密度函数 $f_\xi(x)$;

(2) 试求 $\xi = 0.5$ 下 η 的条件分布密度函数 $f_{\eta|\xi}(y|0.5)$;

(3) 试问 $P\left(\eta > \frac{1}{2}|\xi > \frac{1}{2}\right)$.

6, (15 分) 设 ξ 与 η 独立，都服从标准正态分布 $N(0,1)$.

(1) 试证明 $U=\xi+\eta$ 与 $V=\xi-\eta$ 相互独立;

(2) 试问 U,V 及 (U,V) 服从何种分布？

7, (20 分) 设随机向量 (ξ,η) 的联合概率函数为

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3
1	2/27	0	0	1/27
2	2/9	2/9	2/9	0
3	0	2/9	0	0

(1) 试求在 $\xi=1$ 的条件下 η 的条件概率函数;

(2) 试求在 $\xi=1$ 的条件下 η 的条件数学期望 $E[\eta|\xi=1]$;

(3) 试求 ξ 与 η 的协方差 $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)$.

8, (15 分) (1) 已知随机变量 ξ 的特征函数为

$$\phi_\xi(t)=0.4+0.3e^{it}+0.2e^{2it}+0.1e^{3it},\quad i=\sqrt{-1}.$$

试求 $E[\xi]$;

(2) 记 $B(n,p)$ 为二项分布. 设 $\xi\sim B(3,0.3)$, $\eta\sim B(3,0.3)$, 且 ξ 与 η 独立，试求 $2\xi+\eta$ 的特征函数.

9, (10 分) 已知 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 为独立随机变量序列，且

$$P(\xi_n=\sqrt{n+1})=P(\xi_n=-\sqrt{n+1})=\frac{1}{n+1},$$

$$P(\xi_n=0)=1-\frac{2}{n+1},\quad n=1,2,\cdots.$$

试证对任意 $\varepsilon>0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right|<\varepsilon\right)=1$.

10, (15 分) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 为独立同分布随机变量序列，且

$$P(\xi_n=0)=P(\xi_n=1)=\frac{1}{2},\quad n=1,2,\cdots.$$

试证 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{2^k}$ 的分布当 $n\to\infty$ 时收敛于 $[0,1]$ 上的均匀分布.