641

华南理工大学
2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：线性代数

适用专业：概率论与数理统计

共　　页

一、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1．设 A、B 分别是 m、n 阶方阵，则行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}$ 的值为（　　　　）。

（A）$-|A|\cdot|B|$；（B）$(-1)^{mn}|A|\cdot|B|$；（C）$(-1)^{m+n}|A|\cdot|B|$；（D）$|A|\cdot|B|$。

2．设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，

$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有（　　　）。

（A）$APQ=B$；（B）$AQP=B$；（C）$PQA=B$；（D）$QPA=B$。

3．设线性方程组 $A_1X=B_1$ 与线性方程组 $A_2X=B_2$ 同解，则下列命题正确的是（　　　）。

（A）秩(A_1,B_1)＝秩(A_2,B_2)；　（B）秩(A_1,B_2)＝秩(A_2,B_1)；

（C）秩(A_1,A_2)＝秩(A_1,B_1)；　（D）秩(A_1,B_1)＝秩(B_1,B_2)。

4．设向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，β_1 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，β_2 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示，则对于任意的常数 k，一定有（　　　）。

（A）α_1，α_2，α_3，$k\beta_1+\beta_2$ 线性无关；

（B）α_1，α_2，α_3，$k\beta_1+\beta_2$ 线性相关；

（C）α_1，α_2，α_3，$\beta_1+k\beta_2$ 线性无关；

（D）α_1，α_2，α_3，$\beta_1+k\beta_2$ 线性相关。

5．下列矩阵不能相似于对角形的是（　　　）。

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$。

6．下列矩阵为正定矩阵的是（　　　）。

（A）$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$。

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x-4 \\ 2 & 3 & x-3 & 1 \\ 3 & x-2 & 4 & 2 \\ x-1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$中$x^3$的系数为 ________________

2．设A为n阶可逆方阵，A^*是A的伴随矩阵。若λ是A的特征值，则矩阵$(A^*)^2$必有特征值 ____________

3．若齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$有非零解，则 $\lambda =$__________

4．设 $A = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix}$，其中 $a_ib_j \neq 0$ （$i = 1, 2, \cdots, m$；$j = 1, 2, \cdots, n$），则A的秩为________

5．设向量组$\alpha_1 = (1, 2, -1, 1)$，$\alpha_2 = (2, 0, t, 0)$，$\alpha_3 = (0, -4, 5, -2)$线性相关，则$t =$_________

6．若实二次型$f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$经正交变换$X = PY$可化成标准形$f = 6y_1^2$，则$a =$ _________

三、计算题（每小题 12 分，共 72 分）

1．计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$。

2．已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ 3x_1-x_2-k_1x_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=k_2 \end{cases}$，问 k_1 和 k_2 各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在有无穷多解的情况下，试求一般解。

3．求向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1)$，$\alpha_2=(1,1,-1,1)$，$\alpha_3=(1,-1,1,-1)$，$\alpha_4=(1,2,1,2)$，$\alpha_5=(1,2,1,3)$，$\alpha_6=(1,-3,-4,-7)$ 的一个极大线性无关组，并用它来表示其余向量。

4．用正交变换 $X=PY$ 化二次型

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$ 为标准形。

5．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，E 是单位矩阵，求 X。

6．（10 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$，其行列式 $|A|=-1$，又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，求 a，b，c 和 λ_0。

四、证明题（每小题 15 分，共 30 分）

1．设 A 是 n 阶实方阵，证明：

1）线性方程组 $AX=0$ 的解一定是 $A^TAX=0$ 的解；

2）线性方程组 $A^TAX=0$ 的解也一定是 $AX=0$ 的解；

3）秩 $(A)=$ 秩 (A^TA)。

2．设方阵 A 与方阵 B 相似，证明：

1）A 与 B 有相同的特征多项式；

2）若 λ 是 A 的特征值，且 A 可逆，则 $\lambda\neq 0$，λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值。