630

华南理工大学
2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：量子力学

适用专业：凝聚态物理

共 2 页

（本试卷共 5 大题，每题 30 分，总分为 150 分）

1. 质量为 m 的粒子在宽度为 a 的一维无限深势阱中运动.

(a) 建立适当的坐标系，写出哈密顿算符，求解定态薛定谔方程.

(b) 当粒子处于状态 $\psi(x)=\frac{1}{2}\psi_1(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\psi_2(x)$ 时，求测量粒子能量时的可能取值及相应的概率. 其中 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 分别是基态和第一激发态.

(c) 若上式的 $\psi(x)$ 是 $t=0$ 时刻的波函数，求粒子在其后任意时刻的波函数.

2. 对于角动量算符 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ ，

(a) 在直角坐标系中，推导各分量之间的对易关系，并归纳出统一的表达式.

(b) 定义升降算符 $L_\pm=L_x\pm iL_y$，利用对易关系 $\left[L_z,L_\pm\right]$ 和 $\left[L^2,L_\pm\right]$ 证明：

若 f 是 L^2 和 L_z 的共同本征态，则 $L_\pm f$ 也是 L^2 和 L_z 的本征态.

(c) 在球坐标系中，求解 L_z 的本征方程.

3. 质量为 m 的粒子处于角频率为 ω 的一维谐振子势中.

(a) 写出在坐标表象中的哈密顿算符，本征值及本征函数(可不归一化).

(b) 写出在动量表象中的哈密顿算符.

(c) 证明在动量表象中，哈密顿算符的矩阵元为

$$H_{p'p}=\frac{p^2}{2m}\delta(p'-p)-\frac{1}{2}m\omega^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}\delta(p'-p).$$

4. 对于描述电子自旋的泡利矩阵$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$,

(a) 在σ_z表象中求σ_x和σ_y的归一化本征函数.

(b) 若$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为某一方向余弦，证明算符

$\sigma_n = \sigma_x \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma$的本征值为$\pm 1$，说明其物理意义.

(c) 对于两个电子组成的体系，若用$|\uparrow\rangle$和$|\downarrow\rangle$分别表示单电子自旋平方和自旋z分量的共同本征态，证明态矢量$|\chi\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$是体系总自旋平方的本征态.

5. 取$Axe^{-\lambda x}$为试探波函数，应用变分原理估算粒子在势场$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ \varepsilon x & (x > 0) \end{cases}$中的基态能量. 以上表达式中$A$、$\lambda$、$\varepsilon$均为常数, 且$\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$.